XXXVI Турнир имени М. В. Ломоносова 29 сентября 2013 года

Конкурс по математике. Ответы и решения

(предварительная версия от 17.10.2013)

В скобках указано, каким классам рекомендуется задача (решать задачи более старших классов также разрешается, решение задач более младших классов при подведении итогов не учитывается).

1. (6–7) У Маши есть двухрублёвые и пятирублёвые монеты. Если она возьмёт все свои двухрублёвые монеты, ей не хватит 60 рублей, чтобы купить четыре пирожка. Если все пятирублёвые — не хватит 60 рублей на пять пирожков. А всего ей не хватает 60 рублей для покупки шести пирожков. Сколько стоит пирожок?

Ответ. 20 рублей.

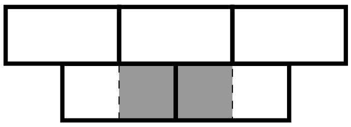
Решение. Если Маша возьмет все свои и двухрублевые, и пятирублевые монеты, то всего ей не хватит $60 + 60 = 120$ рублей на $4 + 5 = 9$ пирожков. А с другой стороны, ей будет не хватать 60 рублей на 6 пирожков. То есть $9-6 = 3$ пирожка стоят $120-60 = 60$ рублей. Значит, один пирожок стоит $60 : 3 = 20$ рублей.

(А всего у Маши 60 рублей: 10 монет по два рубля и 8 монет по пять рублей.)

2. (6–8) Оказывается, можно придумать фигуру, которую нельзя разрезать на «доминошки» (на прямоугольники из двух клеток), но если к ней пририсовать доминошку — получившуюся фигуру уже можно будет разрезать на доминошки.

Нарисуйте по клеточкам такую фигуру (она не должна распадаться на части), пририсуйте к ней доминошку (заштрихуйте её) и покажите, как разрезать результат на доминошки.

Решение. Один из возможных ответов изображен ниже.



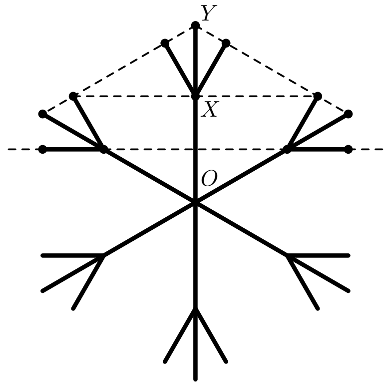
3. (6–11) Имеется 36 борцов. У каждого некоторый уровень силы, и более сильный всегда побеждает более слабого, а равные по силе сводят поединок вничью.

Всегда ли этих борцов можно разбить на пары так, что все победители в парах будут не слабее, чем все те, кто сделал ничью или проиграл, а все сделавшие ничью будут не слабее всех тех, кто проиграл?

Решение. Всегда. Упорядочим борцов по силе (борцы равной силы идут подряд), и пусть борцы из более сильной половины встречаются с борцами из более слабой.

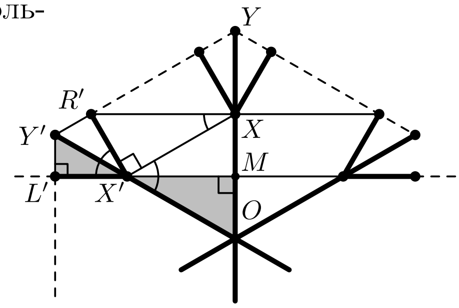
Все победители — из более сильной половины, проигравшие — из более слабой. Пусть борец А из первой половины сделал ничью с борцом Б из второй (и значит, равен ему по силе). Так как А не слабее любого борца из второй половины, то А и Б не слабее всех проигравших и сделавших ничью. Так как Б не сильнее любого борца из первой половины, то А и Б не сильнее всех победителей и сделавших ничью. Как следствие, А и Б равны по силе всем сделавшим ничью.

4. (8–10) На рисунке изображена снежинка, симметричная относительно поворота вокруг точки O на $60°$ (т. е. при этом повороте каждый луч снежинки переходит в другой луч) и отражения относительно прямой OX. Найдите отношение длин отрезков $OX : XY$. (Пунктирными линиями показаны точки, лежащие на одной прямой.)



Ответ. $OX : XY = 3 : 2$.

Решение. Вместо отношения $OX : XY$ будем искать равное ему отношение $OX' : X'Y'$. Докажем, что треугольники $X'MO$ и $X'L'Y'$ — прямоугольные треугольники с углом $30°$.



В силу поворотной симметрии снежинки угол $\angle XOX'$ равен $60°$. А из симметрии снежинки относительно прямой OX прямая XM перпендикулярна прямой OM.

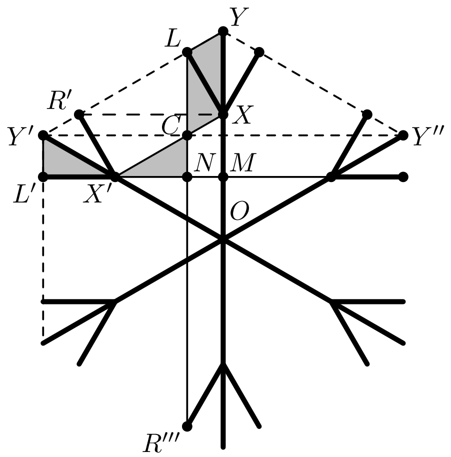
В треугольнике $X'L'Y'$ угол $X'L'Y'$ равен углу $OX'M$ как вертикальный. А углы $X'Y'L'$ и $X'OM$ равны, так как параллельны прямые $Y'L'$ и OM.

Вариант 1. Осталось найти отношение гипотенуз этих треугольников — или, что то же самое, отношение гипотенуз равных им треугольников $X'Y'R'$ и $X'MX$.

Но $XX'R'$ — тоже прямоугольный треугольник с углом $30°$. Действительно, $\angle XX'R' = 180° - \angle Y'X'R' - \angle XX'O = 90°$, а $\angle X'XR' = 90° - \angle OXX' = 30°$.

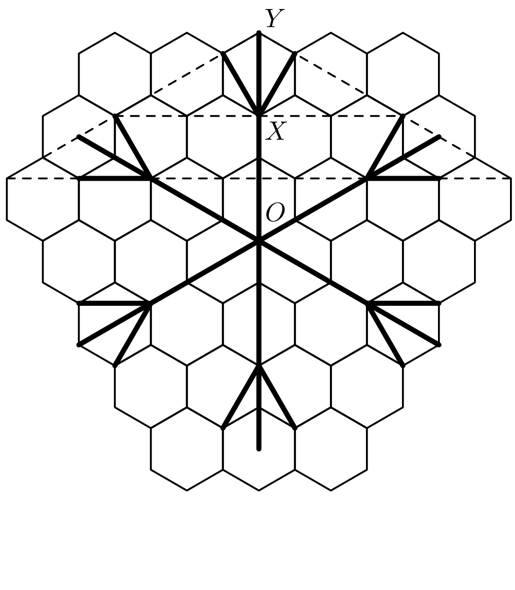
Таким образом, имеем цепочку подобных треугольников: $X'MX \sim XX'R' \sim X'R'Y'$. Соответственно, отношение $OX : XY$ равно

$$\frac{X'M}{XX'} \cdot \frac{XX'}{X'R'} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = 3 : 2.$$



Вариант 2. Можно обойтись без подобия треугольников. Пусть C — точка пересечения прямых $Y'Y''$ и LR'''. Тогда треугольник $LY'C$ равен треугольнику $YR'X$; значит, $LC = XY$, откуда треугольник LCX равен треугольнику XYL.

Поэтому точка C лежит на прямой XX' и треугольник NCX' равен треугольнику $L'Y'X'$. Следовательно (поскольку $CN : CX' = 1 : 2$, а $CX' = Y'X'$),
$YX : XO = CX' : (CX' + CX) = 2 : 3$.



Комментарий. Такую снежинку легко нарисовать на клетчатой бумаге — только клеточки должны быть не квадратами, а правильными шестиугольниками.

Это сделано на рисунке слева. На нем видно, что длина отрезка OX равна 3 сторонам клетки, а длина отрезка XY — 2 сторонам клетки.

5. (8–11) Отличник Вася складывает обыкновенные дроби без ошибок, а Петя складывает дроби так: в числитель пишет сумму числителей, а в знаменатель — сумму знаменателей.

Учительница предложила ребятам сложить три несократимые дроби. У Васи получился правильный ответ 1. Мог ли у Пети получиться ответ меньше $\dfrac{1}{10}$?

Решение. Да. Например, $\dfrac{49}{99}+\dfrac{51}{101}+\dfrac{1}{9999}=1$, а $\dfrac{49+51+1}{99+101+9999}=\dfrac{101}{10199}<\dfrac{101}{10100}=\dfrac{1}{100}$.

Комментарий. Идея решения: чтобы результат Пети сильно отличался от правильного, нужно, чтобы у одной из дробей был большой (по сравнению с другими дробями) знаменатель и маленький числитель. Т. е. нужно найти две дроби, сумма которых очень близка к единице (но не равна ей). Для этого возьмем две дроби, близкие к $\frac{1}{2}=\frac{50}{100}$.

6. (10–11) В набор «Юный геометр» входит несколько плоских граней, из которых можно собрать выпуклый многогранник.

Юный геометр Саша разделил эти грани на две кучки. Могло ли случиться, что из граней каждой кучки тоже можно собрать выпуклый многогранник?

(И в начале, и в конце каждая из граней набора должна являться гранью многогранника.)

Решение. Могло. Например, из граней правильного октаэдра можно сложить два правильных тетраэдра.