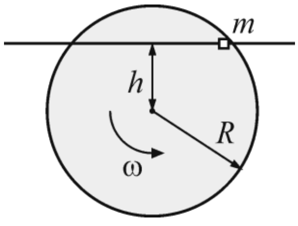
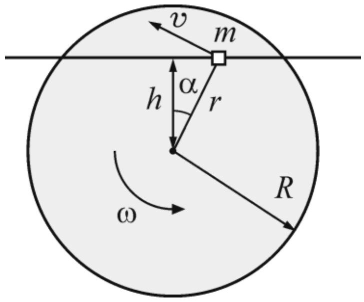
Турнир имени М.В. Ломоносова
Заключительный тур 2015 г.
ФИЗИКА

Задача 1.



Небольшой кубик массой m = 10 г надет на прямую горизонтальную спицу, вдоль которой он может перемещаться без трения. Спицу закрепляют над горизонтальным диском радиусом R = 10 см, вращающимся вокруг своей вертикальной оси с угловой скоростью ω = 0,1 рад/с. При этом спица находится на расстоянии h = 6 см от центра диска, и в начальный момент кубик находится на краю диска (см. рис. вид сверху). Кубик прижат к диску с постоянной вертикальной силой N = 10 Н, коэффициент трения кубика о диск равен μ = 0,3. Через какое время кубик, сдвинувшись вдоль спицы, окажется на противоположном краю диска?

Решение:



Кубик может двигаться только вдоль спицы. Из всех приложенных к нему сил только сила трения, действующая со стороны диска, может иметь ненулевую проекцию на направление спицы.

Сила трения направлена против относительной скорости кубика. Рассмотрим положение кубика в некоторый момент времени (см. рисунок). Точка диска, над которой находится кубик, движется со скоростью $v = \omega r$. Проекция этой скорости на направление спицы равна $v_0 = \omega r \cos\alpha = \omega h = 0{,}6$ см/с и не зависит от положения кубика. То есть, когда кубик разгонится относительно спицы до скорости v_0, его относительное смещение и, следовательно, действующая на него сила трения будут перпендикулярны спице, и скорость кубика больше не будет меняться.

Итак, мы определили характер движения кубика: вначале он разгоняется относительно спицы до скорости v_0, а затем движется с этой постоянной скоростью. Время разгона можно оценить следующим образом:

$$t_1 \approx \frac{v_0}{a} \approx \frac{v_0}{(\mu N / m)} = 20 \text{ мкс}.$$

Если бы кубик двигался всё время со скоростью v_0, то время движения составило бы

$$t_2 = \frac{2\sqrt{R^2 - h^2}}{v_0} \approx 26{,}7 \text{ с}.$$

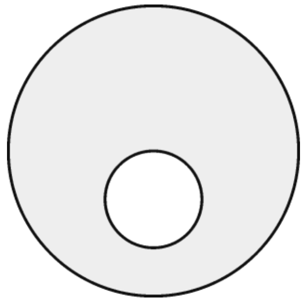
Поскольку $t_1 << t_2$, то можно пренебречь начальным этапом движения кубика (не учитывать время его разгона) и считать, что кубик всё время движется с установившейся скоростью v_0. Тогда искомое время движения кубика есть $t \approx t_2 = \dfrac{2\sqrt{R^2 - h^2}}{v_0} \approx 26{,}7$ с.

Ответ: кубик, сдвинувшись вдоль спицы, окажется на противоположном краю диска через время $t \approx \dfrac{2\sqrt{R^2 - h^2}}{v_0} \approx 26{,}7$ с.

Критерии оценивания:

Указано, что только сила трения может изменять скорость кубика	1 балл
Показано, что для любого возможного положения кубика, проекция скорости соответствующей точки диска на направление спицы равна v_0	2 балла
Правильно описан характер движения кубика	3 балла
Оценено время разгона	1 балл
Найдено время равномерного движения	1 балл
Из сравнения времён сделан вывод, что временем разгона можно пренебречь	1 балл
Записан ответ	1 балл

Задача 2.



Внутри ледяного шара радиусом $R = 9$ мм находится сферическая полость радиусом $R/3$, заполненная разреженным воздухом (см. рис.). Центр полости находится на расстоянии $R/3$ от центра шара. Шар изначально находился в холодильнике при температуре $T_0 = 0$ °C, а затем его внесли в комнату с температурой воздуха в ней $T_1 = 25$ °C, и лёд начал таять. Мощность P теплообмена льда с воздухом задаётся формулой $P = \alpha S \Delta T$, где $\alpha = 40\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$, S – площадь контактирующей с воздухом поверхности льда, ΔT – разность температур воздуха и льда. Теплообменом путём излучения можно пренебречь. Через какое время после начала таяния мощность теплообмена льда с воздухом будет равна $P_0 = 565$ мВт? Плотность льда $\rho = 0{,}9$ г/см^3, удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг.

Решение:

Разреженный воздух внутри полости имеет температуру 0 °C и не может нагреваться до тех пор, пока он окружен льдом. Поэтому до того, как полость оттает, таяние будет происходить только с внешней поверхности шара. Пусть в некоторый момент времени t шар имеет радиус $R(t)$. За малое время dt растает лёд массой

$$dm = \frac{Pdt}{\lambda} = \frac{\alpha \cdot 4\pi R^2 \cdot \Delta T}{\lambda} dt,$$

где $\Delta T = 25$ °C. Изменение радиуса шара за это малое время найдём из условия:

$$\rho \cdot 4\pi R^2 dR = -dm,$$

откуда $dR = -\frac{\alpha \Delta T}{\rho \lambda} dt$.

Следовательно, радиус шара будет линейно уменьшаться со временем со скоростью $\frac{\alpha \Delta T}{\rho \lambda}$.

Найдём радиус шара, при котором мощность теплообмена будет равна P_0:

$$R_1 = \sqrt{\frac{P_0}{4\pi\alpha\Delta T}} \approx 6{,}7 \text{ мм}.$$

Шар будет иметь такой радиус через время

$$t_1 = \frac{(R - R_1)\rho\lambda}{\alpha\Delta T} \approx 683 \text{ с} \approx 11{,}4 \text{ мин}.$$

Когда радиус шара станет равным $R_2 = 6$ мм, полость оттает и быстро заполнится тёплым воздухом из комнаты. При этом теплообмен будет идти не только через внешнюю, но и через внутреннюю поверхность льдинки. Мощность теплообмена в этот момент будет равна

$$P_2 = \alpha\Delta T \cdot 4\pi\left(R_2^2 + (R/3)^2\right) \approx 0{,}565 \text{ Вт},$$

то есть то, что нужно. Это наступит в момент времени

$$t_2 = \frac{(R - R_2)\rho\lambda}{\alpha\Delta T} \approx 891 \text{ с} \approx 14{,}9 \text{ мин}.$$

После этого площадь поверхности будет уменьшаться и мощность теплообмена будет меньше P_0.

Ответ: мощность теплообмена льда с воздухом будет равна $P_0 = 565$ мВт через $t_1 \approx 11{,}4$ мин и $t_2 \approx 14{,}9$ мин.

Критерии оценивания:

Найдена скорость уменьшения радиуса шара	2 балла
Найден радиус шара, при котором мощность теплообмена будет равна P_0	2 балла
Найден момент времени t_1	2 балла
Показано, что в момент оттаивания полости мощность теплообмена также будет равна P_0	2 балла

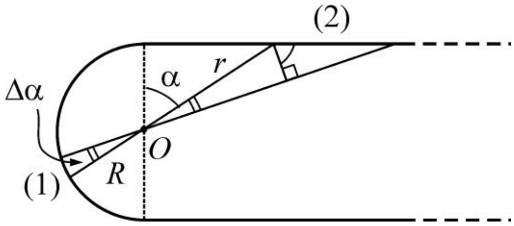
Найден момент времени t_2 2 балла

Задача 3.

Тонкая диэлектрическая нить образует плоскую геометрическую фигуру, состоящую из полуокружности радиусом R и двух полубесконечных прямых лучей (см. рис.). Нить равномерно заряжена, заряд единицы ее длины равен τ. Найдите напряжённость электрического поля, создаваемого нитью в центре O полуокружности.

Решение:

Найдём напряженности полей, создаваемых в точке O двумя малыми элементами нити, один из которых лежит на полуокружности, а другой – на одном из лучей, причём оба этих элемента видны из точки O под малым углом $\Delta\alpha$ (см. рис.). Длина элемента (1) равна $\Delta l_1 = R\Delta\alpha$, а расстояние от него до точки O равно R. Поэтому модуль напряжённости поля, создаваемого этим элементом в точке O, равен



$$\Delta E_1 = k\frac{\tau\Delta l_1}{R^2} = k\tau\frac{\Delta\alpha}{R}.$$

Длина элемента (2) равна $\Delta l_2 = \dfrac{r\Delta\alpha}{\cos\alpha}$ (здесь использована малость $\Delta\alpha$), а расстояние от него до точки O равно $r = \dfrac{R}{\cos\alpha}$. Модуль напряжённости поля, создаваемого этим элементом в точке O, равен

$$\Delta E_2 = k\frac{\tau\Delta l_2}{r^2} = k\tau\frac{r\Delta\alpha}{r^2\cos\alpha} = k\tau\frac{\Delta\alpha}{R}.$$

Векторы напряжённостей полей $\Delta\vec{E}_1$ и $\Delta\vec{E}_2$ равны по модулю и противоположны по направлению, поэтому их сумма равна нулю. Поскольку всю нить можно разбить на пары таких элементов, то и суммарная напряженность поля, создаваемого всей нитью в точке O, равна нулю.

Ответ: напряжённость электрического поля, создаваемого нитью в центре O полуокружности, равна нулю.

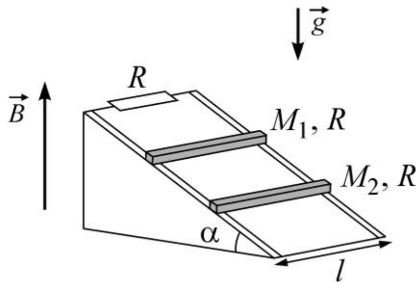
Критерии оценивания:

Правильно найден модуль напряжённости поля, создаваемого небольшим элементом нити, расположенным на полуокружности	3 балла
Правильно найден модуль напряжённости поля, создаваемого небольшим элементом нити, расположенном на одном из лучей	5 баллов
Получен правильный ответ	2 балла

Правильный ответ также может быть получен путем непосредственного интегрирования. Такое решение нужно оценивать следующим образом:

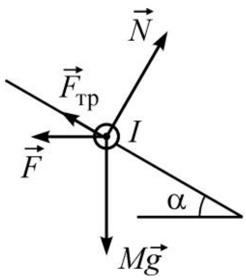
Правильно найден модуль напряжённости поля, создаваемого в точке O полуокружностью	3 балла
Правильно найден модуль напряжённости поля, создаваемого в точке O одним из лучей	5 баллов
Получен правильный ответ	2 балла

Задача 4.



По параллельным друг другу длинным проводящим рельсам, расположенным под углом α к горизонту, начинают скользить две перемычки массами M_1 и M_2, которые всё время остаются перпендикулярными рельсам (см. рис.). Каждая перемычка имеет сопротивление R. Резистор с точно таким же сопротивлением подключен между верхними концами рельсов. Рельсы находятся в однородном магнитном поле, вектор индукции $\vec{B}$ которого направлен вертикально вверх. Коэффициент трения между перемычками и рельсами равен μ, расстояние между рельсами l. Найдите модули скоростей перемычек через большой промежуток времени после начала их движения, считая, что $\mu < \operatorname{tg}\alpha$ и $M_2 > M_1$. Сопротивление рельсов и контактов много меньше R.

Решение:



На каждую из перемычек действуют сила тяжести Mg, сила нормальной реакции рельсов N, сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N$ и сила Ампера $F = IlB$, где I – сила текущего через перемычку тока (см. рис.). Через достаточно больше время после начала движения перемычки скорость ее движения установится. Это произойдет потому, что при возрастании скорости перемычки будет увеличиваться сила Ампера, которая будет тормозить перемычку, и через достаточно большое время сумма действующих на перемычку сил обратится в ноль. На первом этапе решения запишем для каждой из перемычек второй закон Ньютона для случая установившегося движения. При этом для первой и второй перемычек получаются одинаковые уравнения, и поэтому все индексы при переменных, относящиеся к данной перемычке, можно опустить. Уравнения запишем в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси:

$$N\cos\alpha + \mu N\sin\alpha - Mg = 0,$$
$$N\sin\alpha - \mu N\cos\alpha - F = 0.$$

Из первого уравнения получаем:

$$N = \frac{Mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

Подставив этот результат во второе уравнение, находим:

$$F = Mg\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = IlB.$$

Отсюда получим выражение для силы тока, текущего через перемычку:

$$I = \frac{Mg}{lB}\cdot\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = CM,$$

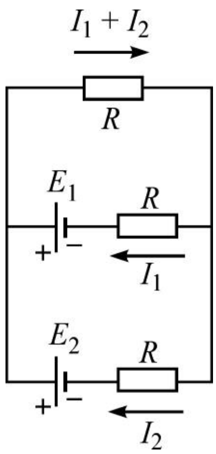
где введено обозначение

$$C = \frac{g}{lB}\cdot\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

Рассмотрим далее контур, создаваемый неподвижным резистором и одной из перемычек. Площадь этого контура S изменяется со временем, а значит, меняется и поток Φ вектора магнитной индукции через этот контур. Следовательно, в перемычке возникнет ЭДС индукции, равная по модулю

$$E = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \frac{B\cos\alpha \cdot \Delta S}{\Delta t} = BlV\cos\alpha,$$

где V – скорость перемычки.



Еще раз отметим, что полученные результаты справедливы для каждой из перемычек.

Эквивалентная электрическая схема рассматриваемой цепи имеет три параллельно соединённые ветви. Будем считать, что перемычка движется вдоль рельсов вниз, в соответствии с чем и выберем знаки ЭДС индукции на схеме (см. рис.). Далее при записи уравнений индексы опускать не будем. В соответствии со вторым правилом Кирхгофа,

$$(I_1 + I_2)R = E_1 - I_1R = E_2 - I_2R.$$

Решая получившуюся систему уравнений, находим:

$$I_1 = \frac{2E_1 - E_2}{3R}, \quad I_2 = \frac{2E_2 - E_1}{3R}.$$

Подставив сюда ранее полученные выражения для силы тока и ЭДС индукции, получим систему уравнений, которая позволяет найти установившиеся скорости перемычек:

$$2V_1 - V_2 = \frac{3RC}{Bl\cos\alpha}M_1, \quad 2V_2 - V_1 = \frac{3RC}{Bl\cos\alpha}M_2.$$

Решая эту систему, находим:

$$V_1 = \frac{RC}{Bl\cos\alpha}(2M_1 + M_2) = \frac{gR}{(lB)^2\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}\cdot(2M_1 + M_2),$$

$$V_2 = \frac{RC}{Bl\cos\alpha}(2M_1 + M_2) = \frac{gR}{(lB)^2\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}\cdot(2M_2 + M_1) > V_1.$$

Поскольку $V_1 < V_2$, то верхняя перемычка не догонит нижнюю, и характер движения не поменяется, пока нижняя перемычка не доедет до конца рельсов.

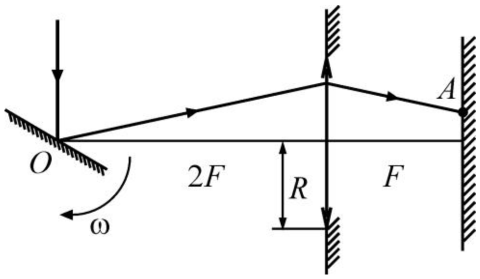
Ответ: модули скоростей перемычек через большой промежуток времени после начала их движения равны $V_1 = D\cdot(2M_1 + M_2)$ и $V_2 = D\cdot(2M_2 + M_1)$, где $D = \frac{gR}{(lB)^2\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$.

Критерии оценивания:

Записан второй закон Ньютона для перемычки	1 балл
Получена связь между силой тока в перемычке и массой перемычки	1 балл
Найдена ЭДС индукции (величина + направление)	1+1 балл
Записаны правила Кирхгофа	2 балла
Найдена сила тока через каждую из перемычек	1 балл
Получен ответ	3 балла

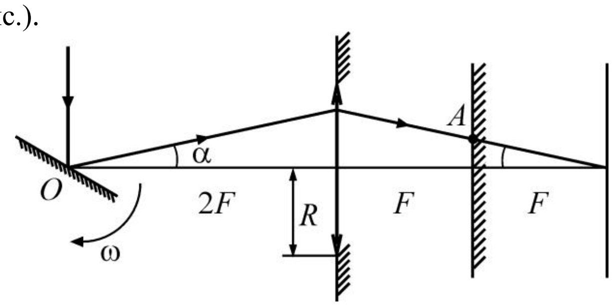
Задача 5.

Экспериментатор собрал оптическую схему, показанную на рисунке. В непрозрачном экране сделано круглое отверстие радиусом R, в которое помещена тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием F. Слева от линзы находится плоское зеркало, которое вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка. На зеркало сверху падает луч света, параллельный линзе и перпендикулярный оси вращения зеркала. Луч падает на зеркало в точку O, которая лежит на главной оптической оси линзы на расстоянии $2F$ от оптического центра линзы. Точка O при этом является точкой пересечения оси вращения зеркала и главной оптической оси линзы. Справа от линзы в ее фокальной плоскости находится экран. Найдите скорость движения светового пятна (точки A) по этому экрану в момент, когда отраженный от зеркала луч проходит через линзу, составляя с ее главной оптической осью наибольший возможный угол. Считайте, что в начальный момент зеркало расположено горизонтально.



Решение:

Поскольку угол падения света на зеркало равен углу его отражения, то угол α между отражённым лучом и главной оптической осью линзы меняется со временем t по закону $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - 2\omega t$. По формуле тонкой линзы, расстояние от оптического центра линзы до изображения точки O равно $2F$ (см. рис.).



Значит, расстояние от точки A до главной оптической оси линзы равно $x = F\operatorname{tg}\alpha \approx F\alpha$ (поскольку формула тонкой линзы справедлива в параксиальном приближении, то угол α должен быть малым). Значит, модуль скорости светового пятна равен

$$V = \left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right| \approx F\left|\frac{\Delta \alpha}{\Delta t}\right| = 2\omega F .$$

Из полученной формулы видно, что модуль скорости в рамках используемого приближения постоянен.

Ответ: скорость движения светового пятна по экрану равна $V \approx 2\omega F$.

Критерии оценивания:

Определено положение изображения точки O	3 балла
Определенно положение точки A при заданном угле поворота зеркала	3 балла
Получено выражение для модуля скорости светового пятна на экране	3 балла
Замечено, что в используемом приближении скорость светового пятна постоянна	1 балл.