Задача 1.

Решение.

Пусть Ваня приобрёл x конфет и у него оставось p рублей, а Маша приобрела $x+37$ конфет и у неё осталось q рублей. Тогда у Вани было $5x+p$ рублей, а у Маши — $4(x+37)+q$ рублей. Получаем:

$$5x+p=4(x+37)+q; \qquad 5x+p=4x+148+q,$$

откуда $x=148+q-p$. Значит, у Вани было $740+5q-4p$ рублей, причём $p\in\{0;1;2;3;4\}$, $q\in\{0;1;2;3\}$. Подставляя различные значения p и q, получаем, что у Вани и у Маши могло быть 724, 728, 729, $732--734$, $736--743$, $745--747$, 750, 751 или 755 рублей.

Для верного решения задачи достаточно было привести любое из этих чисел и обосновать, почему оно подходит.

Ответ: 724, 728, 729, $732--734$, $736--743$, $745--747$, 750, 751 или 755 рублей.

Задача 2.

Решение.

Предположим, что хватит двух красок. Тогда из условия, что соседние вершины разного цвета, раскраска восстанавливается однозначно. Но в этой раскраске вершины, между которыми ровно четыре стороны, одного цвета. Значит, двух красок не хватит.

Покажем, что трёх красок хватит. Покрасим вершины в порядке $1-2-3-1-2-3-1-2-3-\ldots$ Так сделать можно, потому что общее количество вершин делится на 3. В такой раскраске между вершинами одного цвета количество сторон обязательно кратно трём. А числа 1 и 4 не кратны трём, значит, вершины, между которыми 1 или 4 стороны, разного цвета.

Ответ: двух красок не хватит, трёх красок хватит.

Задача 3.

Доказательство.

Треугольники NAK, KBL, LCM и MDN равны. Обозначим длины их катетов как a и b, длины гипотенуз как c, радиусы вписанных окружностей как r. Тогда сторона квадрата $ABCD$ равна $a+b$.

Центры вписанных окружностей треугольников KBL и LCM удалены от BC на r. Поэтому соединяющий их отрезок параллелен стороне квадрата $ABCD$. Значит, все четыре центра образуют квадрат со стороной $AB-2r=a+b-2r$. Из школьного курса геометрии известно, что в прямоугольном треугольнике $a+b-2r=c$ (доказательство основано на том, что отрезки касательных, проведённых из вершины ко вписанной окружности, равны). Поэтому длина стороны этого квадрата равна c, как и длина стороны квадрата $KLMN$.

Задача 4.

Решение.

Пусть n-ый член арифметической прогрессии равен $100+d(n-1)$, где d — разность прогрессии. Если в этой прогрессии найдётся квадрат целого числа k, то

$$k^2=100+(n-1)d; \qquad k^2-100=(n-1)d; \qquad (k-10)(k+10)=(n-1)d.$$

Поскольку n и k — произвольные целые числа, мы можем рассмотреть $n=d+21$ и $k=d+10$. В этом случае будут выполняться равенства $k-10=d$, $k+10=n-1$. Получаем, что $(d+21)$-й член прогрессии будет равен $100+d(d+20)=100+20d+d^2=(d+10)^2$, то есть является квадратом.

Ответ: да, можно.

Задача 5.

Решение.

Положим на каждую чашу весов по две монеты и взвесим их при помощи ещё одной. Если весы покажут равновесие, то выберем пару момент с произвольной чаши весов, в противном случае выберем пару момент с чаши, которая при взвешивании оказалась тяжелее.

Заметим, что среди двух выбранных монет и монеты, не участвовавшей во взвешивании, не более одной фальшивой. Действительно, если весы показали правду, то обе монеты в выбранной паре настоящие, либо на каждой из чаш весов находится по одной фальшивой монете, а не участвовшая во взвешивании монета является настоящей. Если весы показали неправду, то одна фальшивая монета была истрачена и среди всех монет осталось не более одной фальшивой.

При втором взвешивании положим на каждую чашу весов по одной из выбранной пары монет и взвесим их при помощи монеты, не участвовшей в первом взвешивании. Если весы покажут равновесие, то обе взвешиваемые монеты настоящие, в противном случае монета, которая при взвешивании оказалась тяжелее, настоящая.

Действительно, если весы показали правду, то выбранная монета настоящая, а если весы показали неправду, то среди взвешиваемых монет нет фальшивых.

Ответ: да, можно.