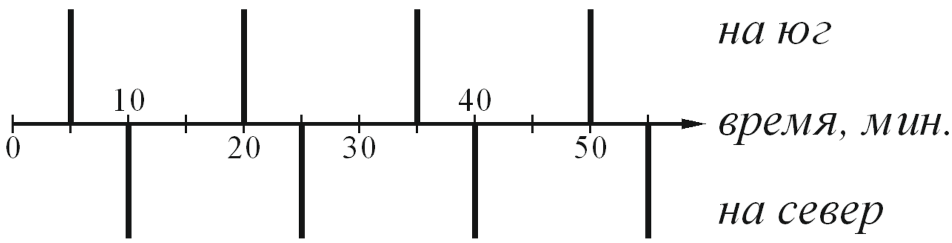
Задача 1. (задача для школьников 5-7 классов)

Школьник Вася каждое утро выходит из дома и спускается в метро. Там он садится в первый же пришедший на станцию поезд. Если этот поезд идет на север, Вася едет до нужной станции и идет в школу. Если же первым приходит поезд, идущий на юг, Вася едет на другой конец города и идет в кино. По мнению Васи, при таком способе действий он в среднем прогуляет примерно половину учебных дней, что, как он считает, вполне допустимо. Однако к концу учебного года выяснилось, что Вася бывал в кино в два раза чаще, чем в школе! Как такое могло произойти?

Поезда на юг и на север идут через одинаковые промежутки времени. На станцию Вася приходит в случайный момент времени между 8.00 и 9.00.

Решение.

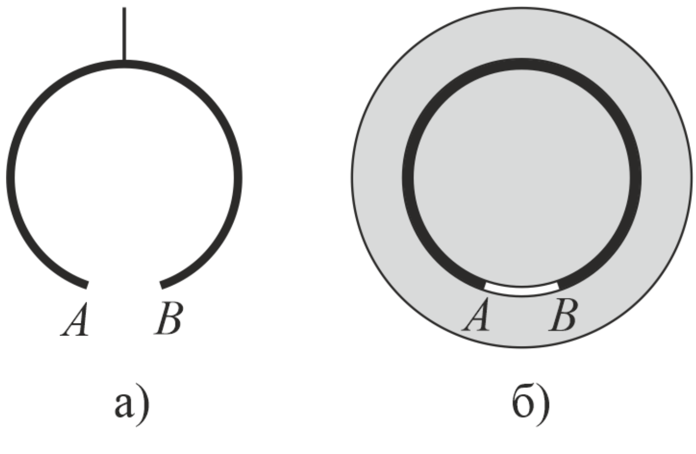


Хотя поезда на юг и на север идут с одинаковыми интервалами, это не значит, что промежутки времени между поездом на север и следующим поездом на юг и между поездом на юг и следующим поездом на север должны быть одинаковы. Для Васиной станции расписание поездов вполне может быть устроено так, как показано на рисунке. Легко понять, что в таком случае у Васи, который приходит на станцию в случайный момент времени, будет вдвое больше шансов уехать на юг (в кино), чем на север (в школу).

Задача 2. (задача для школьников 5-8 классов)

Почти все тела (в частности, все металлы) при нагревании увеличиваются в размерах. Это явление называется тепловым расширением.

а) Сделаем из металлической проволоки кольцо с зазором AB, подвесим его на ниточке и нагреем. Увеличится или уменьшится при этом ширина зазора?



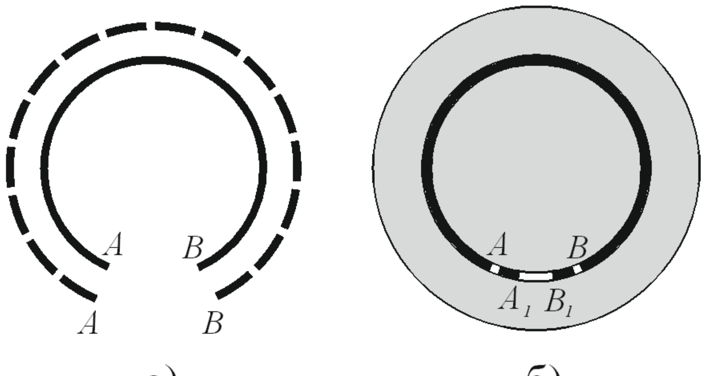
Поясните своё решение.

б) Тот же вопрос, если кольцо плотно вставить между двумя цилиндрами (см. рисунок). Тепловым расширением цилиндров можно пренебречь

Поясните своё решение.

Решение.

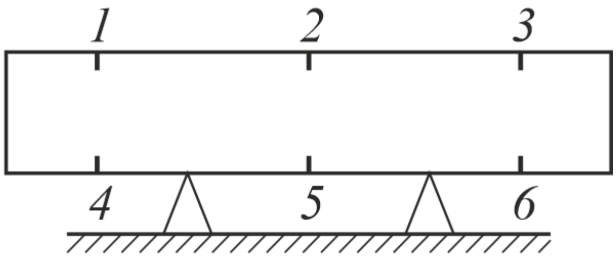
а) Свободно висящая проволока при нагревании расширится во все стороны, то есть примет вид, показанный на рисунке пунктиром. Длина проволоки и диаметр кольца при этом увеличатся на одну и ту же долю прежнего размера. Поэтому зазор AB будет занимать ту же долю кольца, что и раньше. Поскольку диаметр кольца увеличился, ширина зазора тоже увеличится.



а) б)

б) В этом случае цилиндры не дадут проволоке расшириться вбок, она останется дугой окружности прежнего диаметра. А вот длина этой дуги увеличится – цилиндры этому не мешают. В результате концы проволоки сблизятся и зазор AB уменьшится.

Задача 3. (задача для школьников 5-11 классов)



Цилиндрическое бревно положили на две опоры и пытаются пилить в показанных на рисунках точках.

В каких точках пилу заклинит, а в каких – нет? Для каких точек на этот вопрос нельзя дать однозначного ответа?

Поясните своё решение.

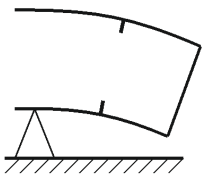
При необходимости можете прикрепить к этому пункту чертеж решения. Загружать можно файл в формате .jpg, .png размером до 2,5 Мб. Пожалуйста, не грузите фотографию в последний момент. Это может занять некоторое время. После загрузки файла, его содержимое начинает отображаться на странице. Дождитесь загрузки файла. Не забудьте сохранить решение после загрузки. Все комментарии к решению должны быть набраны в текстовое поле.

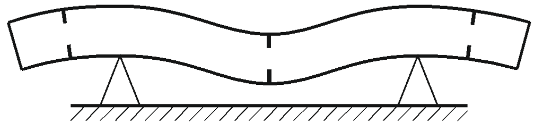
Решение.

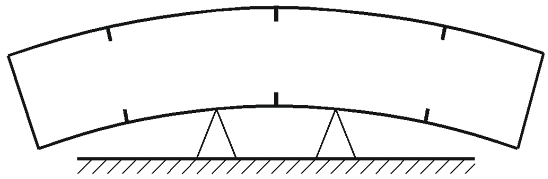
Пилу заклинит, если попытаться пилить бревно в том месте, где древесина сжата, и не заклинит, если в месте распила древесина растянута. Концы бревна, выступающие за опоры, под действием силы тяжести изогнутся вниз (см. рисунок а), величина изгиба сильно увеличена для наглядности). При таком изгибе бревно в верхней части растягивается, а в нижней сжимается. Поэтому в точках 1 и 3 пилу не заклинит, а в точках 4 и 6 – заклинит.

Для средней же части бревна (между опорами) возможны два случая. Если бревно не очень толстое, а расстояние между опорами велико, эта часть под собственным весом опустится вниз и изогнется так, как показано на рисунке б). Тогда в верхней части она будет сжата, а в нижней – растянута. В этом случае пилу заклинит в точке 2, а в точке 5 – не заклинит.

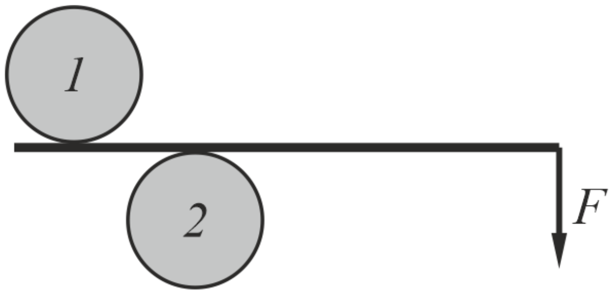
Если же бревно достаточно толстое, а расстояние между опорами невелико, «свисающие» за опорами части бревна изогнут среднюю часть вверх (они действуют на эту часть силами растяжения вверху и силами сжатия внизу). В результате в середине бревно изогнется так, как показано на рисунке в). Вверху оно будет растянуто, внизу – сжато. Тогда пилу заклинит в точке 5, а в точке 2 – не заклинит.


а)


б)


в)

Задача 4. (задача для школьников 8-9 классов)



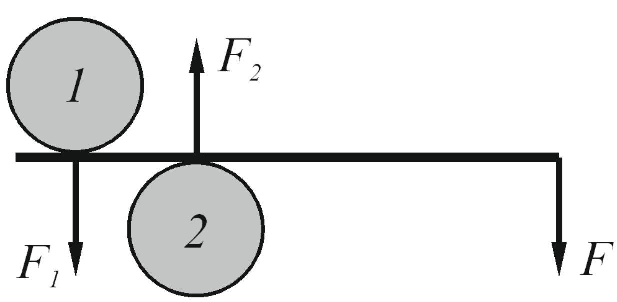
Две одинаковые бочки стоят на полу. Между ними вставили палку так, как показано на рисунке (вид сверху), и приложили к ее концу горизонтальную силу, величину которой стали плавно увеличивать.

Какая из бочек сдвинется первой?

Ответ объясните.

При необходимости можете прикрепить к этому пункту чертеж решения. Загружать можно файл в формате .jpg, .png размером до 2,5 Мб. Пожалуйста, не грузите фотографию в последний момент. Это может занять некоторое время. После загрузки файла, его содержимое начинает отображаться на странице. Дождитесь загрузки файла. Не забудьте сохранить решение после загрузки. Все комментарии к решению должны быть набраны в текстовое поле.

Решение.



Поскольку бочки одинаковые, максимальные силы трения покоя, которые надо преодолеть чтобы их сдвинуть, для них тоже будут одинаковыми. Отсюда следует, что первой сдвинется та бочка, на которую палка давит с большей силой. Допустим, в некоторый момент палка действует на первую бочку с силой F_1, а на вторую

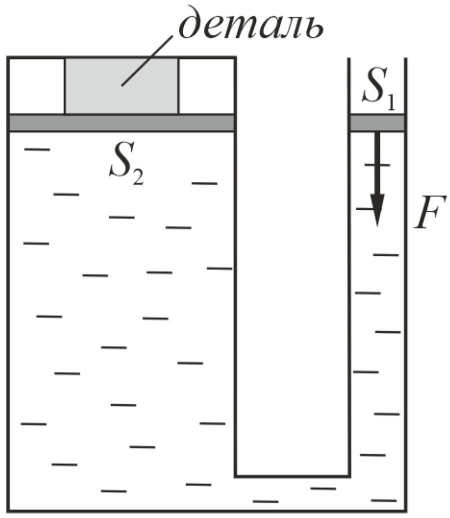
– с силой F_2. Тогда по третьему закону Ньютона бочки давят на палку с такими же силами, но в обратную сторону. На рисунке изображены силы, действующие на палку. Пока бочки не начали двигаться, эти силы должны уравновешивать друг друга:

$$F + F_1 = F_2$$

Отсюда следует, что в любой момент времени $F_2 > F_1$. Значит, первой сдвинется бочка 2.

Тот же результат можно получить, записав для палки условие моментов сил относительно, например, точки приложения силы F.

Задача 5. (задача для школьников 8-10 классов)



Цилиндры гидравлического пресса расположены вертикально и заполнены водой. Вставленные в них поршни вначале находятся на одной высоте, их площади равны $S_1 = 10$ см^2 и $S_2 = 1$ м^2. Между большим поршнем и крышкой цилиндра находится металлическая деталь, форму которой нужно изменить. Деталь при малых деформациях ведет себя как упругое тело, подчиняющееся закону Гука $F = kx$ (F – приложенная к ней сила, x – деформация), ее коэффициент жесткости $k = 1,6 \times 10^7$ Н/м. И только когда x становится больше, чем $x_0 = 5$ мм, деформация становится пластической (необратимой). После этого дальнейшее изменение формы детали уже не требует увеличения приложенной силы.

К малому поршню приложили силу $F = 100$ Н. Хватит ли этой силы, чтобы началась пластическая деформация детали? Массой поршней и детали, а также деформациями поршней и крышки цилиндра можно пренебречь. Сжимаемость воды тоже можно не учитывать.

Запишите решение.

Решение.

Найдем силу, которую большой поршень должен приложить к детали, чтобы началась ее пластическая деформация:

$$F_0 = kx_0 = 8 \times 10^4 \text{ Н}$$

На первый взгляд, такая сила вполне может быть достигнута (и превышена) в данных условиях. Если к малому поршню приложена сила $F = 100$ Н, то на большой поршень вода будет давить с силой

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F = 10^5 \text{ Н}$$

Это больше, чем необходимая сила F_0. Однако учтем, что для начала пластической деформации деталь нужно деформировать на x_0 – именно на это расстояние должен подняться большой поршень. Для этого в большой цилиндр из малого должна поступить вода объемом

$$V = S_2 x_0 = 5 \times 10^{-3} \text{ м}^3$$

Малый поршень при этом опустится на расстояние

$$h = \frac{V}{S_1} = 5 \text{ м}$$

Давление воды под большим поршнем тогда будет меньше давления, создаваемого малым поршнем, на величину $\Delta p = \rho g h$ ($\rho \approx 10^3$ кг/м^3 – плотность воды, $g \approx 10$ м/с^2 – ускорение свободного падения, подъем большого поршня на $x_0 << h$ можно не учитывать). А сила, действующая на него, будет равна

$$F_2 = \left(\frac{F}{S_1} - \rho g h\right) S_2 = 5 \times 10^4 \text{ Н}$$

Это меньше, чем F_0. Пластическая деформация детали в данных условиях не начнется.

Задача 6. (задача для школьников 9-11 классов)

Основной причиной вечерних камнепадов в горах является замерзание воды в расщелинах скал.

Оцените давление, которое замерзающая вода оказывает на стенки расщелины.

Запишите решение и ответ.

Для решения задачи вам необходимы различные численные данные. Найдите их сами в сети Интернет или других источниках и введите в поле для ввода исходных данных. Не забудьте указать источник этих данных. Это может быть название и автор книги, ссылка на страницу в интернете и т.д.

Решение.

Вода при замерзании расширяется – плотность льда $\rho_{\text{л}}$ несколько меньше плотности жидкой воды $\rho_{\text{в}}$. Поэтому, если окружающая воду в расщелине скальная порода не деформируется, образующийся при замерзании лед оказывается сильно сжатым. Найдем относительную деформацию этого льда.

Рассмотрим водяной кубик, ребро которого равно a. При «свободном» замерзании этот кубик увеличится – его ребро станет $a + \Delta a$. Масса его не изменится, поэтому

$$\rho_{\text{в}} a^3 = \rho_{\text{л}}(a + \Delta a)^3 = \rho_{\text{л}}(a^3 + 3a^2\Delta a + 3a(\Delta a)^2 + (\Delta a)^3) \approx \rho_{\text{л}}(a^3 + 3a^2\Delta a)$$

Мы пренебрегли третьим и четвертым слагаемыми в скобках – при $\Delta a << a$ они малы по сравнению со вторым. Отсюда находим:

$$\Delta a = \frac{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}}{3\rho_{\text{л}}} a$$

Будем считать, что окружающие кубик стенки не дают ему изменить свои размеры (в нашем случае это не совсем так – расщелина в скале открыта по крайней мере с одной стороны, но для оценки порядка величины эффекта такое предположение вполне годится). Тогда образовавшийся при замерзании лед окажется сжат по трем направлениям его ребер (так называемое всестороннее сжатие), причем его относительная деформация будет равна

$$\epsilon = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}}{3\rho_{\text{л}}}$$

Это не совсем точное вычисление – оно не учитывает изменение поперечных размеров тела при его продольной деформации сжатия или растяжения (явление, мерой которого является так называемый коэффициент Пуассона). Но для оценки такая точность не нужна.

Найдя в сети Интернет значения плотностей $\rho_{\text{в}} \approx 1000$ кг/м^3 и $\rho_{\text{л}} \approx 917$ кг/м^3 (например, на сайте Википедия) и подставив их, получаем: $\epsilon \approx 0,03$. В той же Википедии находим модуль Юнга льда: $E \approx 3 \times 10^9$. С его помощью находим давление, которое лед оказывает на стенки расщелины:

$$p = \epsilon E \sim 10^8 \text{ Па}$$

Заметим, что это, скорее, оценка сверху возникающих реально давлений. При намного меньших давлениях ($\sim 10^5$ Па – предел текучести льда, по данным из источника) скорее всего, уже начнется пластическое течение льда к выходу из расщелины. Это число можно считать оценкой возникающих давлений снизу.

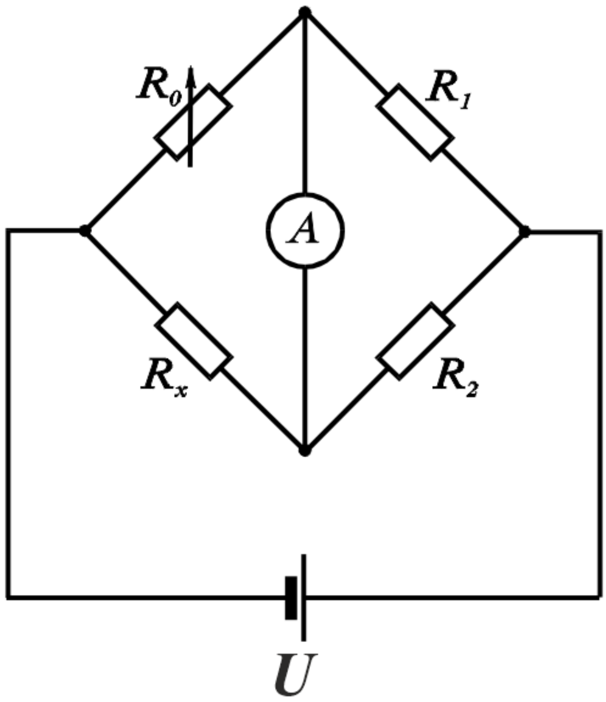
Задача 7. (задача для школьников 9-11 классов)

Мост Уитстона. Схема, показанная на рисунке, используется для высокоточного измерения сопротивлений. R_1 и R_2 - известные сопротивления, R_0

- переменный резистор, сопротивление которого можно менять контролируемым образом. R_x - неизвестное сопротивление, величину которого нужно измерить. В процессе измерения R_0 подбирают таким, чтобы схема была сбалансирована (т.е. амперметр показывал «0»).

а) Найдите сопротивление R_x, если известны R_1, R_2 и R_0, при котором наступает балансировка.

Запишите решение и ответ.

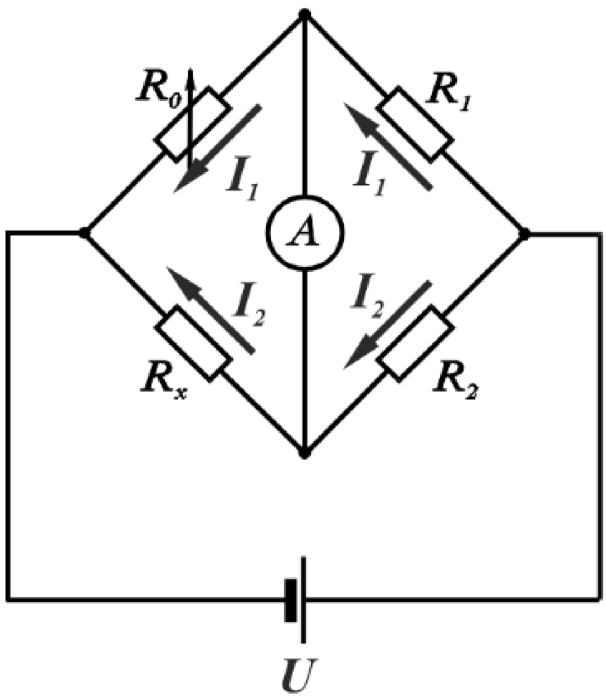


б) Пусть $R_1 = R_2 = 100$ Ом, $R_x \approx 50$ Ом, напряжение источника $U = 15$ В. Из-за конечной чувствительности амперметра балансировку моста удается осуществить лишь с точностью $\Delta I \sim 0,1$ мА (т.е. если ток через амперметр не больше этой величины, то показания прибора неотличимы от «0»). Оцените возникающую из-за этого ошибку в измерении R_x. Внутреннее сопротивление амперметра очень мало, его можно считать равным нулю.

Запишите решение и ответ.

Решение.

а) Поскольку в режиме балансировки ток через амперметр не течет, резисторы R_1 и R_0 можно считать соединенными последовательно. Тогда по закону Ома ток через них равен



$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_0}$$

Аналогично, ток через резисторы R_2 и R_x равен

$$I_2 = \frac{U}{R_2 + R_x}$$

Напряжение на амперметре также равно нулю, если ток через него нулевой. Значит, узлы цепи, к которым он подключен, имеют в этом режиме одинаковый потенциал. Отсюда следует равенство напряжений на резисторах R_1 и R_2:

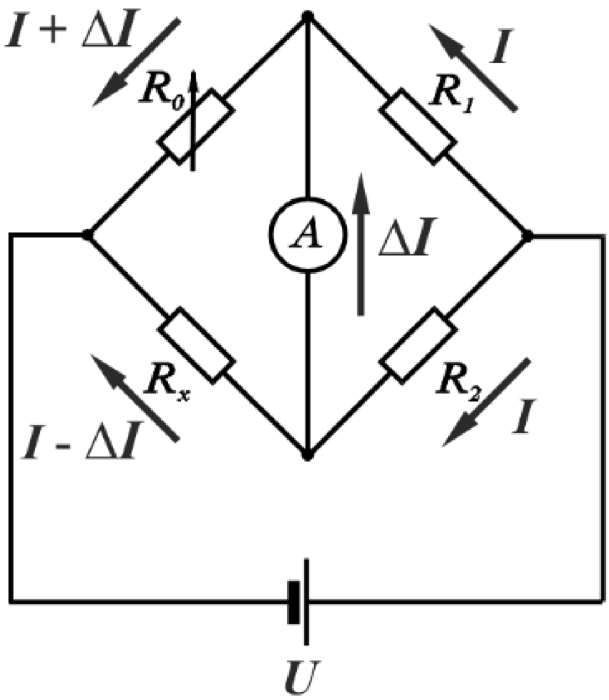
$$I_1 R_1 = I_2 R_2$$

Подставив сюда токи I_1 и I_2, получаем условие балансировки моста:

$$\frac{R_1}{R_1 + R_0} = \frac{R_2}{R_2 + R_x},$$

из которого находим величину измеряемого сопротивления:

$$R_x = \frac{R_2 R_0}{R_1}$$



б) Пусть через амперметр протекает максимальный неотличимый от нуля ток ΔI. Поскольку внутреннее сопротивление амперметра можно считать равным нулю, узлы цепи, к которым он присоединен, по-прежнему будут эквипотенциальны. Значит, напряжения на резисторах R_1 и R_2 будут одинаковы, а поскольку $R_1 = R_2$, одинаковы будут и токи через них. Обозначим ток через каждый из них через I. По порядку величины этот ток $I \sim U/(R_2 + R_x) \sim$ 100 мА, что, как видим, много больше ΔI. Через резистор R_0, как видно из рисунка, протекает ток $I + \Delta I$, а через резистор R_x – ток $I - \Delta I$. Напряжения на этих резисторах одинаковы, поэтому при $\Delta I = 0$ (точная балансировка) R_0 должно равняться R_x, что соответствует формуле из предыдущего пункта задачи. Однако, поскольку сила тока через R_0 в нашем случае несколько больше, чем через R_x, сопротивление переменного резистора придется сделать несколько меньшим: $R_0 = R_x - \Delta R$. ΔR – это и есть ошибка в измерении неизвестного резистора. Чтобы ее найти, приравняем напряжения на R_0 и R_x:

$$(R_x - \Delta R)(I + \Delta I) = R_x(I - \Delta I)$$

$$R_x I + R_x \Delta I - \Delta R I - \Delta R \Delta I = R_x I - R_x \Delta I$$

Поскольку $\Delta I << I$, а значит, и $\Delta R << R$, последним слагаемым в левой части этого уравнения можно пренебречь. Тогда получаем:

$$\Delta R \approx \frac{2\Delta I}{I} R_x$$

Ток I найдем, приравняв сумму напряжений на R_2 и R_x напряжению источника U:

$$R_2I + R_x(I - \Delta I) = U$$

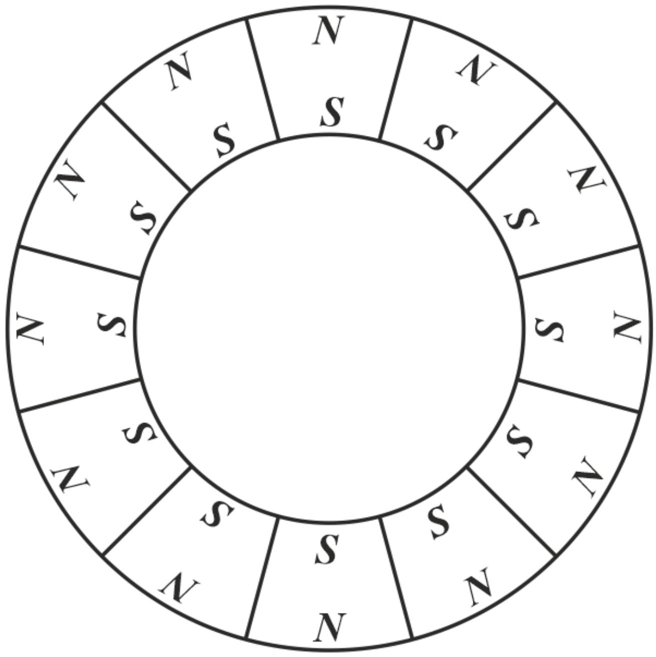
Величиной ΔI в силу ее малости можно пренебречь. Тогда для I получаем значение, совпадающее со сделанной выше оценкой:

$$I \approx \frac{U}{R_2 + R_x} \approx 100 \text{ мА}$$

Значит, искомая ошибка:

$$\Delta R \approx \frac{2\Delta I}{I} R_x = 0{,}1 \text{ Ом}$$

Задача 8. (задача для школьников 9-11 классов)



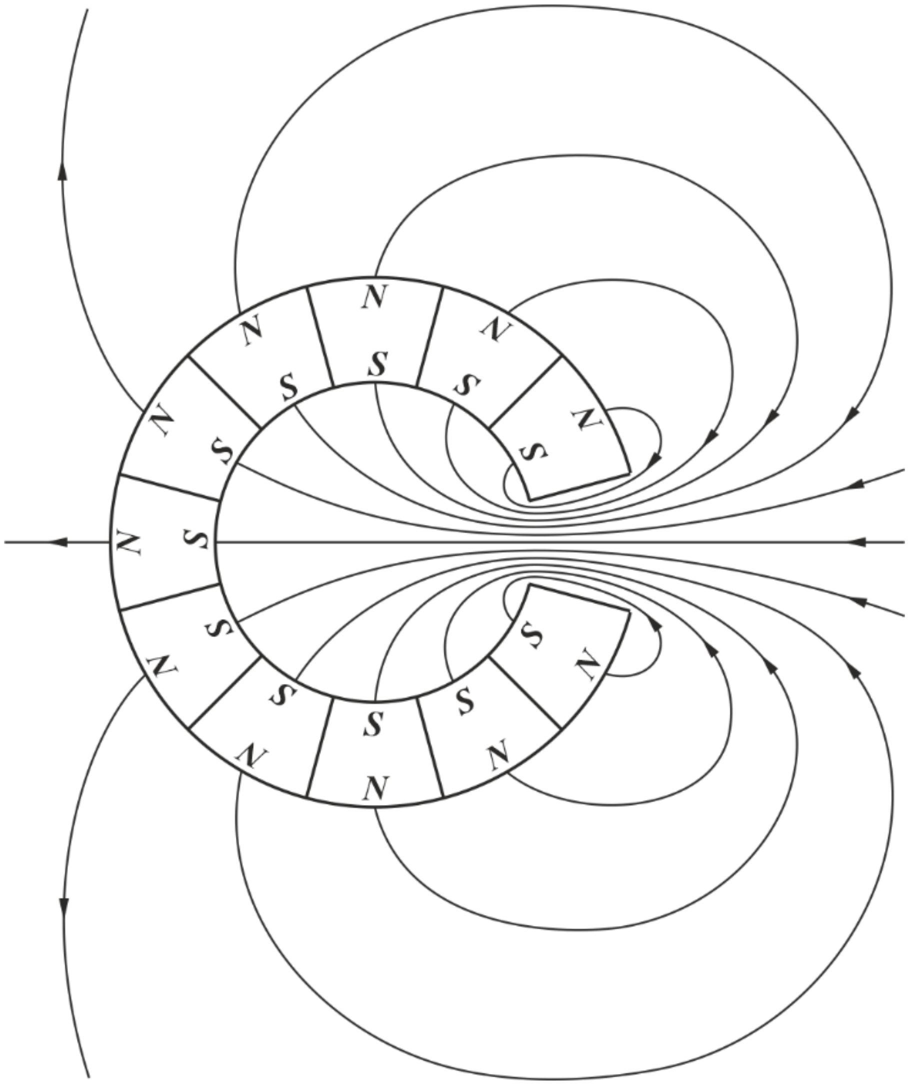
Монополь. Как известно, у любого магнита есть два полюса – северный и южный. Отделить их друг от друга, распилив магнит на две части, не получится. В месте распила на половинках возникнут еще два магнитных полюса, так что каждая из них опять окажется магнитом с двумя полюсами. Но, возможно, получить магнит с одним полюсом (монополь) получится другим способом? Возьмем полый стальной шар и разрежем его на сегменты так, как показано на рисунке. Каждый сегмент с помощью сильного электромагнита намагнитим вдоль радиуса, так, чтобы на внешней поверхности у него возник северный полюс, а на внутренней – южный. После этого соберем из сегментов исходный шар. У получившегося тела на поверхности будут только северные полюса сегментов, поэтому оно будет вести себя как магнит с одним (северным) полюсом!

Получится ли таким способом создать монополь?

Если нет, то что же произойдет при сборке этого шара и почему?

Решение.

Сделать монополь, разумеется, не получится. Его существование нарушило бы фундаментальные законы электродинамики, а именно – одно из уравнений Максвелла, выражающее тот факт, что поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю. Другая формулировка этого факта – утверждение, что линии магнитной индукции всегда замкнуты, поэтому сколько их выходит из какого-то объема, ровно столько должно в другом месте в него входить. У магнита, например, линии магнитной индукции выходят из северного полюса, огибают магнит и входят в его южный полюс. Дальше они проходят внутри магнита к северному полюсу и замыкаются.



На рисунке показано, что произойдет с магнитным полем под конец сборки нашего шара. Пока он собран неполностью, линии магнитной индукции, выходящие из северных полюсов сегментов, будут огибать шар, заходить внутрь через оставшееся отверстие и замыкаться на южных полюсах. Но из рисунка видно, что, когда останется поставить последний сектор, этим линиям придется в отверстии идти очень густо. Это означает, что магнитное поле там будет очень сильным, причем его направление будет противоположно направлению намагниченности секторов. Когда мы попытаемся поставить на место последний сектор, со стороны этого поля на него будет действовать огромная отталкивающая сила. И чем меньше будет остающийся в шаре зазор, тем сильнее там будет магнитное поле. В результате, если нам удастся преодолеть силу отталкивания и вставить последний сегмент, это поле просто перемагнитит его (и края соседних сегментов) в противоположном направлении. В этом месте на поверхности шара возникнет южный полюс, а внутри него – северный. Это произойдет, какой бы магнитно-жесткий (трудно перемагничиваемый) материал мы не взяли, потому что при стремлении площади зазора к нулю магнитное поле в нем возрастает неограниченно.

Задача 9. (задача для школьников 10-11 классов)

Представим себе, что далеком будущем человечество решило по каким-то причинам изменить орбиту Луны. Для этой цели на поверхность этого небесного тела было доставлено большое число сверхмощных реактивных двигателей, а также запасы горючего и окислителя для них. Все двигатели были установлены на лунной поверхности вертикально, соплами вверх, и одновременно включены. И… результат оказался намного более скромным, чем предсказывали наивные расчеты.

а) Пусть скорость истечения реактивных газов из сопла двигателя равна $u = 2000$ м/с, полный расход топлива (горючее + окислитель) в единицу времени $\mu = 2500$ кг/с. Найдите силу тяги такого двигателя сразу после его включения.

б) Найдите эффективную силу тяги такого двигателя (импульс, приобретаемый Луной в единицу времени) через достаточно большое время, когда эта сила уже перестанет меняться.

в) Тот же вопрос, что в пункте б), если скорость истечения реактивных газов $u = 3000$ м/с (расход топлива прежний).

Для решения задачи вам необходимы различные численные данные. Найдите их сами в сети Интернет или других источниках и введите в поле для ввода исходных данных. Не забудьте указать источник этих данных. Это может быть название и автор книги, ссылка на страницу в интернете и т.д.

Решение.

а) Сразу после включения сила тяги двигателя будет равна импульсу, передаваемому им в единицу времени реактивным газам. Масса образовавшихся газов, очевидно, равна массе израсходованного топлива, поэтому

$$F_0 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m u}{\Delta t} = \mu u = 5 \times 10^6 \text{ Н}$$

б) С течением времени струя реактивных газов будет подниматься все выше над поверхностью Луны. Скорость ее при этом будет уменьшаться из-за силы гравитационного притяжения. Это означает, что часть сообщенного газам импульса начнет возвращаться назад к Луне, и эффективная сила тяги двигателя будет уменьшаться. Сила, с которой он давит на поверхность Луны, разумеется, будет по-прежнему равна F_0, а вот импульс, приобретаемый Луной в единицу времени будет становиться все меньше и меньше.

Дальше все будет зависеть от соотношения между скоростью истечения газов из двигателя u и второй космической скоростью для Луны v_2. Второй космической скоростью, напомним, называется минимальная скорость, которую нужно сообщить телу на поверхности планеты, чтобы оно смогло преодолеть гравитационное притяжение и удалиться от нее на бесконечно большое расстояние. Величину этой скорости для Луны можно найти в Википедии, а можно вычислить самостоятельно. Пусть тело массы m запущено вертикально вверх с начальной скоростью v_0 с поверхности планеты массы

M и радиуса R. Тогда его скорость v на расстоянии r от центра планеты определяется законом сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{mM}{R} = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r}$$

Первые слагаемые в левой и правой частях – кинетические энергии тела на старте и на расстоянии r, вторые слагаемые – потенциальные энергии в эти моменты (G – гравитационная постоянная). При $r \to \infty$ второе слагаемое в правой части стремится к нулю, а первое слагаемое всегда неотрицательно. Поэтому, чтобы тело смогло удалиться «на бесконечность», левая часть уравнения должна быть больше или равна нулю:

$$\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{mM}{R} \geq 0$$

Минимальная v_0, удовлетворяющая этому условию, и является второй космической скоростью:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Подставив сюда найденные, например, в Википедии массу Луны $M = 7{,}35 \times 10^{22}$ кг, ее радиус $R = 1{,}74 \times 10^6$ м, а также значение гравитационной постоянной $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2, получаем:

$$v_2 \approx 2380 \text{ м/с}$$

Как видим, скорость истечения реактивных газов в нашем случае оказывается меньше второй космической скорости. Это означает, что реактивная струя на некоторой высоте будет остановлена гравитацией Луны, после чего начнет падать. После того, как ее передний край достигнет поверхности Луны, ее импульс престанет меняться – она будет представлять собой стационарную (не зависящую от времени) «петлю» реактивных газов, поднимающихся над Луной и опускающихся назад. Поэтому перестанет меняться и импульс Луны – силы давления двигателя и падающих газов на ее поверхность будут полностью уравновешены силой гравитационного взаимодействия с газовой «петлей». Эффективная сила тяги обратится в ноль.

в) В этом случае скорость истечения реактивных газов превосходит вторую космическую скорость. Реактивная струя будет замедляться притяжением Луны, но сможет преодолеть ее притяжение и удалиться на такое расстояние, где ее скорость практически перестанет меняться («на бесконечность»).

Легко понять, что эта остаточная скорость u_1 и будет играть роль эффективной скорости истечения, определяющей тягу двигателя через большое время. Найдем эту скорость из закона сохранения энергии:

$$\frac{mu^2}{2} - G\frac{mM}{R} = \frac{mu_1^2}{2}$$

В левой части – полная энергия порции газов массы m на выходе из двигателя, в правой – ее полная энергия на большом удалении от Луны (потенциальную энергию можно считать равной нулю). Вычитаемое в левой части можно заменить на $mv_2^2/2$ (см. пункт б). Тогда получим:

$$\frac{mu^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2}$$

$$u_1 = \sqrt{u^2 - v_2^2} \approx 1830 \text{ м/с}$$

Эффективная сила тяги будет равна $F_1 = \mu u_1 \approx 4{,}58 \times 10^6$ Н.

Заметим, что изложенная здесь картина происходящего не является точной. В ней не учтено, что молекулы в струе реактивных газов участвуют в хаотическом тепловом движении. Из-за этого, даже если скорость струи меньше второй космической, некоторая часть ее молекул движется со скоростью, большей v_2. Такие молекулы смогут преодолеть притяжение Луны, и эффективная сила тяги не будет равна нулю. Желающие могут попробовать учесть это явление, но это потребует самостоятельного изучения максвелловского распределения молекул по скоростям, а также вычисления не очень простых интегралов.