Задача 1.

Семь гномов купили себе стулья цветов радуги (красный, оранжевый, жёлтый, зелёный, голубой, синий и фиолетовый), однако при сборке они допустили ошибку: у каждого стула сидение одного цвета, а ножки другого. Каждый гном, приходя с работы,, всегда садится на стул, у которого цвет сидения такой же, как и цвет ножек стула, на котором он сидел вчера.

Каждый вечер за ужином Белоснежка записывает, какой гном сидит на сидении какого цвета: первым записывается имя гнома, сидящего на красном сидении, вторым — на оранжевом, и т.д. В течение какого наибольшего количества дней все записи, сделанные Белоснежкой, могут быть различными?

Ответ: 12.

Решение.

Поскольку стульев конечное число, то любой гном через какое-то количество дней (возможно, разное для разных гномов) окажется на том же стуле, что и в первый день. Назовём последовательность стульев, на которых может побывать один гном *циклом.* Количество стульев в цикле назовём *длиной.* Записи сделанные Белоснежкой будут различными, пока все гномы не вернутся на свои изначальные места, что произойдёт через количество дней, равное наименьшему общему кратному длин циклов.

Семь стульев разбиваются на циклы четырьмя способами: один цикл длиной 7, один цикл длиной 5 и один цикл длиной 2, один цикл длиной 4 и один цикл длиной 3, один цикл длиной 3 и два цикла длиной 2. Записи, сделанные Белоснежкой, будут различными в течение 7, 10, 12 и 6 дней соответственно. Наибольшее количество дней — 12.

Задача 2.

Известно, что числа a, b, c и d положительны. Сумма всех действительных корней уравнений $ax^{2013} + bx^{2000} + cx^{1000} + d = 0$ и $dx^{2013} + cx^{1013} + bx^{13} + a = 0$ равна $-2{,}9$. Найдите эти корни.

Ответ: $-0{,}4$ и $-2{,}5$.

Решение.

Поскольку числа a, b, c и d положительны, все корни обоих уравнений отрицательны. Разделив первое уравнение на x^{2013}, получим:

$$a + bx^{-13} + cx^{-1013} + dx^{-2013} = 0; \quad d \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{2013} + c \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{1013} + b \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{13} + a = 0.$$

Значит, если x_1 является корнем первого уравнения, то $\frac{1}{x_1}$ является корнем второго уравнения и, аналогично, наоборот.

Для пары отрицательных чисел x_1 и $\frac{1}{x_1}$ выполнено неравенство $x_1 + \frac{1}{x_1} \le -2$. Если каждое из уравнений имеет более одного корня, то их сумма не превосходит -4. Значит, каждое из уравнений имеет по одному корню: x_1 и $\frac{1}{x_1}$.

$$x_1 + \frac{1}{x_1} = -2{,}9; \quad x_1^2 + 2{,}9x_1 + 1 = 0,$$

откуда находим корни $-0{,}4$ и $-2{,}5$.

Задача 3.

Продолжения противоположных сторон AB и CD вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а сторон BC и AD — в точке Q. Биссектриса угла APD пересекает прямую AD в точке K; биссектриса угла AQB пересекает прямую AB в точке L. Докажите, что окружности, описанные около треугольника ALK и четырёхугольника $ABCD$, касаются.

Доказательство.

По свойству биссектрисы $\dfrac{AK}{KD} = \dfrac{AP}{PD}$, $\dfrac{AL}{LB} = \dfrac{AQ}{QB}$.

По теореме синусов $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{\sin\angle ADC}{\sin\angle BAD}$, $\dfrac{AQ}{QB} = \dfrac{\sin\angle ABC}{\sin\angle BAD}$.

Поскольку четырёхугольник $ABCD$ — вписанный, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$; $\sin\angle ABC = \sin\angle ADC$. Значит, $\dfrac{AK}{KD} = \dfrac{AL}{LB}$.

Таким образом, треугольник AKL получается из треугольника ABD гомотетией с центром в точке A и коэффициентом $\dfrac{AL}{AB}$. Значит, описанная окружность треугольника AKL получается из описанной окружности четырёхугольника $ABCD$ гомотетией с центром, лежащим на окружности. Поэтому эти окружности касаются.

Задача 4.

На доске 8×8 расставлено по 6 чёрных и серых фишек: чёрные фишки стоят в каждой клетке левой вертикали, за исключением углов, серые — в каждой клетке нижней горизонтали, за исключением углов. Два игрока по очереди перемещают фишки, каждый своего цвета, по следующим правилам: чёрную фишку можно сдвигать на одну клетку вправо (если эта клетка свободна), серую — на одну клетку вверх (при том же условии). При этом за ход разрешается сдвигать одну или несколько фишек своего цвета. Тот, кто не может сделать хода, выиграл. Первыми ходят серые. Кто, серые или чёрные, могут выиграть, как бы ни играл соперник?

Ответ: Выигрывают серые.

Решение.

Будем обозначать горизонтали буквами $A - H$ снизу вверх, а вертикали цифрами $1 - 8$ слева направо. Пронумеруем чёрные фишки числами от 1 до 6 снизу вверх, а серые фишки числами от 1 до 6 слева направо.

Приведём выигрышную стратегию для первого игрока. Она делится на два этапа.

Первый этап. Первым ходом первый игрок перемещает вверх фишки с первой по пятую. Далее, каждому перемещению чёрной фишки сопоставим перемещение серой (если за ход чёрные перемещают несколько фишек, то серые перемещают такое же количество фишек). На любое перемещение чёрной фишки с номером n серый отвечает перемещением фишки с таким же номером, кроме следующих ситуаций:

- Если в результате перемещения шестой чёрной фишки она стала опережать пятую (которая, очевидно, не двигалась) на 2 клетки, то надо переместить пятую серую фишку, а не шестую.
- Если в результате перемещения пятой чёрной фишки (в случае, если она стояла на вертикалях с первой по четвёртую) она стала отставать от шестой (которая, очевидно, не двигалась) на 1 клетку, то надо переместить шестую серую фишку, а не пятую.
- В ответ на перемещение чёрной фишки $F6 - F7$ наступает *второй этап.*

Посмотрим, что произойдёт при таком способе действовать. Заметим, что чёрная фишка с номером $n \leq 4$ окажется не дальше n-ой вертикали, поскольку ход на $n+1$-ую вертикаль ей будет блокировать n-ая серая фишка. Поэтому на первом этапе важно разобраться, что произойдёт с пятыми и шестыми фишками игроков.

Рассмотрим момент, когда серый делает перемещение пятой фишки на клетку $F7$. К этому моменту пятая серая фишка сделала четыре перемещения, значит, возможны две ситуации: либо пятая чёрная фишка сделала четыре перемещения, а шестая чёрная фишка сделала менее шести перемещений; либо пятая чёрная фишка сделала три перемещения, а шестая пять или более перемещений.

В первом случае пятая чёрная фишка не сможет ходить, пока шестая чёрная фишка не достигнет поля $G7$. В этот момент шестая серая фишка будет находится на поле $F7$ и серый переместит пятую фишку с $F6$ на $G6$. Далее, по правилам действия, на перемещение $F5 - F6$ серый отвечает $G6 - H6$, на перемещение $G7 - G8$ серый отвечает $F7 - G7$, а перемещение $F6 - F7$ знаменует начало второго этапа.

Во втором случае ход чёрного $F4 - F5$ сводит всё к первому случаю, а если этот ход не совершать, то шестая чёрная фишка не будет препятствовать перемещению шестой серой фишки. После того, как чёрные займут поле $G8$, они будут вынуждены сходить $F4 - F5$.

В итоге после хода чёрных $F6 - F7$ начинается второй этап.

Второй этап. Последними ходили чёрные. Если на их ходу перемещались первая, вторая или третья фишки, то соответствующие фишки должны переместить и серые. Кроме того, в любом случае серые должны переместить четвёртую фишку. Возможны два варианта: или чёрные не двигали четвёртую фишку во время перемещения $F6 - F7$, или двигали.

В первом случае серые действуют так. На перемещение $F7 - F8$ отвечают перемещением $G7 - H7$. При перемещении любой другой (или других) фишки двигают крайнюю правую из первых четырёх. Таким образом, к моменту, когда четвёртая серая фишка достигнет поля $H5$, четвёртая чёрная фишка попадёт на поле $E7$ (а другие чёрные фишки не могут ходить дальше клеток $B2$, $C3$ и $D4$), а значит, можно двигать третью серую фишку. Когда она достигнет поля $H4$, третья чёрная фишка попадёт на поле $D6$ или $D7$ (первые две чёрные фишки не могут ходить дальше клеток $B2$ и $C3$), а значит, можно двигать вторую серую фишку. Когда она достигнет поля $H3$, вторая чёрная фишка попадёт на поле $C5$, $C6$ или $C7$ (первую чёрную фишку двигать нельзя), а значит, можно двигать первую серую фишку. За шесть ходов она достигнет поля $H2$ (при последнем ходе надо также сходить $G7 - H7$, если этот ход не был сделан ранее), а первая чёрная фишка продвинется не далее $B7$. Серые не могут ходить и выигрывают.

Во втором случае на перемещение чёрной фишки с первой по третью серые отвечают соответствующим перемещением чёрной фишки. Если была перемещена четвёртая или пятая чёрная фишка, то серые перемещают четвёртую фишку. Если эти две фишки были перемещены одновременно, то серые перемещают шестую фишку. В первом из этих вариантов ситуация полностью сводится к предыдущему случаю. Во втором варианте наступит момент, когда чёрная фишка займёт позицию $E5$ (четвёртая серая фишка находится на поле $D5$, потому что сделала на один ход меньше, чем четвёртая чёрная). Ответом на этот ход служит перемещение третьей серой фишки. Дальше на перемещение чёрной фишки с номером n серые будут отвечать перемещением соответствующей фишки, пока это возможно.

Это становится невозможно, когда третья серая фишка окажется на поле $H4$. При этом третья чёрная фишка будет находится на поле $D6$, а значит ни третья, ни четвёртая чёрные фишки не смогут перегородить путь ни одной серой. После этого серым достаточно двигать все фишки, которые возможно. Остаётся заметить, что первая фишка серых достигнет поля $H2$ через пять ходов после хода $B2 - C2$, а первой чёрной фишке понадобится 7 ходов. Значит, серые фишки раньше достигнут края доски и не смогут сделать ход.