Задача 1.

Лена записала на доске два двузначных числа без общих делителей, больших единицы, а Юра выписал в тетрадку все числа, на которые делится хотя бы одно из лениных чисел. Могло ли у него получится 12 чисел?

Ответ: Да, могло.

Решение.

Пусть Лена написала числа 35 и 36. Число 35 имеет четыре делителя: 1, 5, 7, 35, а число 36 — семь делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18. Общий делитель 35 и 36 — это единица. Значит, у Юры получится 12 чисел.

Задача 2.

Мэр задумал реконструировать главную улицу города длиной 100 км. Для этого он хочет установить светофоры, которые 2,5 минуты пропускают машины и полминуты — пешеходов так, чтобы, проехав через первый светофор с любой стороны улицы на зелёный и двигаясь с постоянной скоростью 60 км/ч, водитель проехал бы до конца улицы без остановок. Какое максимальное число светофоров можно поставить при таком условии?

Ответ: 67.

Решение.

Рассмотрим два любых светофора. Пусть расстояние между ними s км, тогда автомобиль, движущийся со скоростью 60 км/ч, пройдёт это расстояние за s минут. Пусть первый светофор пропускает машины в период времени $[t; t + 2{,}5]$, тогда машина, проехавшая светофор в этот период, окажется у второго светофора в период $[t + s; t + s + 2{,}5]$. Значит, второй светофор должен пропускать машины в этот период. С другой стороны, если машина проедет второй светофор по направлению к первому светофору в период $[t + s; t + s + 2{,}5]$, то она окажется у первого светофора в период $[t + 2s; t + 2s + 2{,}5]$. В этот период первый светофор должен пропускать машины, но он это делает в периоды $[t+3n; t+3n+2{,}5]$, где n — целое число. Получаем, что $2s = 3n$, то есть $s = 1{,}5n$ — расстояние (в километрах) между любыми двумя светофорами должно нацело делиться на 1,5.

Если поставить 67 светофоров через 1,5 километра так, что любые два соседних работают в противофазу (то есть на втором зелёный цвет включается через 1,5 минуты после того, как включился на первом), то все условия задачи будут выполнены.

Задача 3.

В треугольнике ABC угол B равен 90°, на стороне BC отмечена точка M, такая что $BM : MC = 1 : 2$, точка N — середина AC. Докажите, что угол AMB равен углу CMN.

Доказательство.

Поскольку треугольник прямоугольный, $BN = AN = CN$. Значит, $\angle NBC = \angle NCB$. Рассмотрим треугольники AMC и NMB. В них $AC = 2BN$, $CM = 2BM$, $\angle NBC = \angle NCB$. Значит, эти треугольники подобны и $\angle AMC = \angle BMN$. Поэтому

$$\angle AMB = \angle BMN - \angle AMN = \angle AMC - \angle AMN = \angle CMN.$$

Задача 4.

Около места впадения одной реки в другую на трёх берегах собрались три пастуха, каждый со стадом овец на своём берегу. По реке их может перевозить лодочник, у которого в лодке всего два места, не включая его самого, и каждое может вмещать либо пастуха, либо одну овцу. При этом лодочник никогда не покидает лодку, овца может выбраться из лодки самостоятельно, а любой из пассажиров не обязан выходить на берег, когда лодка к нему причалила. Нельзя оставлять никакую овцу в лодке или на одном берегу ни с лодочником, ни с каким-либо пастухом, не являющимся её хозяином, если рядом нет её хозяина. Можно ли первого пастуха с овцами переместить на место второго, второго на место третьего, а третьего — на место первого?

Ответ: Да, можно.

Решение.

Покажем как должны действовать пастухи, чтобы переправить овец.

Вначале лодочник берёт первого пастуха и везёт его на третий берег. Затем он сажает в лодку второго пастуха. Второй пастух, не выходя из лодки, перевозит всех своих овец по одной на первый берег. После этого лодочник плывёт на третий берег и меняет второго пастуха на первого.

Первый пастух, не выходя из лодки, перевозит всех своих овец на второй берег и остаётся там. После этого лодочник отвозит второго пастуха на первый берег.

Таким образом, мы поменяли местами первого и второго пастуха. Действуя аналогично, мы можем теперь поменять местами второго и третьего пастуха. В результате первый пастух с овцами окажется на месте второго, второй пастух с овцами окажется на месте третьего, а третий пастух с овцами окажется на месте первого.

Задача 5.

Катя написала на доске пять натуральных чисел, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии. Маша стёрла одно из них и поделила наибольшее из оставшихся на него, из второго по величине вычла его, к третьему — прибавила, а четвёртое умножила. Полученные после этих операций четыре числа оказались последовательными членами геометрической прогрессии. Какие числа записала Катя?

Ответ: 4, 6, 8, 10, 12.

Решение.

Пусть Катя записала числа a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$, где a и d — натуральные числа.

Если Маша сотрёт число $a+3d$ или $a+4d$, то три из получившихся чисел (сумма, произведение и частное) окажутся положительными, а одно (разность) отрицательным. Не может быть четырёх последовательных членов геометрической прогрессии, из которых ровно один отрицательный. Следовательно, Маша не стирала ни $a+3d$, ни $a+4d$.

Если Маша сотрёт число $a+2d$, то у неё получатся числа $a(a+2d)$, $2a+3d$, d и $\dfrac{a+4d}{a+2d}$. Заметим, что при $a>1$ и $d>1$ выполнены следующие неравенства

$$a(a+2d) \geq 2(a+2d) > 2a+3d > d \geq 2 > 1+\frac{2d}{a+2d}.$$

То есть члены геометрической прогрессии, записанные в порядке возрастания, выглядят так: $\dfrac{a+4d}{a+2d}$, d, $2a+3d$, $a(a+2d)$. По свойству геометрической прогрессии:

$$\frac{a+4d}{a+2d}\cdot a(a+2d)=d\cdot(2a+3d);\, a^2+4ad=2ad+3d^2;\, a^2+2ad-3d^2=0,$$

откуда $a=-3d$ или $a=d$. Первый случай не подходит, поскольку a и d — натуральные, значит, $a=d$. Получаем геометрическую прогрессию $\dfrac{5}{3}$, d, $5d$, $3d^2$. Значит, $\dfrac{3d}{5}=5$, что противоречит тому, что d — натуральное.

При $a=1$ получаем числа $2d+1$, $3d+1$, d, $\dfrac{1+4d}{1+2d}$. Два наибольших из этих чисел это $2d+1$ и $3d+1$, значит, знаменатель прогрессии равен $\dfrac{2d+1}{3d+1}$ и число $\dfrac{(2d+1)^2}{3d+1}$ должно совпадать с одним из чисел d или $\dfrac{1+4d}{1+2d}$. Но $\dfrac{(2d+1)^2}{3d+1}>d+1$, а это больше каждого из чисел d и $\dfrac{1+4d}{1+2d}$. Значит, $a\neq 1$.

При $d=1$ получаем числа $a(a+2)$, $2a+3$, 1, $\dfrac{a+4}{a+2}$. Два наименьших из этих чисел это 1 и $\dfrac{a+4}{a+2}$. Значит, знаменатель прогрессии равен $\dfrac{a+4}{a+2}$ и число $\dfrac{(a+4)^2}{(a+2)^2}$ должно совпадать с одним из чисел $a(a+2)$ или $2a+3$. Тогда $\dfrac{a+4}{a+2}$ должно быть целым, что возможно только при $a=1$ или $a=2$. Случай $a=1$ был разобран ранее, а при $a=2$ получаем числа 8, 5, 1, 2, не образующие геометрической прогрессии.

Значит, Маша не могла стереть $a+2d$.

Если Маша сотрёт число $a+d$, то у неё получатся числа $a(a+d)$, $2a+3d$, $2d$, $\dfrac{a+4d}{a+d}$. Заметим, что при $a>2$ и $d>1$ выполнены следующие неравенства

$$a(a+d)\geq 3(a+d)>2a+3d>2d\geq 4>1+\frac{3d}{a+d}.$$

То есть члены геометрической прогрессии, записанные в порядке возрастания выглядят так: $\dfrac{a+4d}{a+d}$, $2d$, $2a+3d$, $a(a+d)$. По свойству геометрической прогрессии:

$$\frac{a+4d}{a+d}\cdot a(a+d)=2d\cdot(2a+3d);\, a^2+4ad=4ad+6d^2;\, a^2=6d^2,$$

откуда $a=\pm\sqrt{6}d$, что противоречит тому, что a и d — натуральные числа.

При $a = 2$ получаем числа $2d+4$, $3d+4$, $2d$, $\dfrac{4d+2}{d+2}$. Два наибольших из этих чисел это $2d+4$ и $3d+4$, значит, знаменатель прогрессии равен $\dfrac{2d+4}{3d+4}$ и число $\dfrac{(2d+4)^2}{3d+4}$ должно совпадать с одним из чисел $2d$ или $\dfrac{4d+2}{d+2}$. Поскольку $\dfrac{(2d+4)^2}{3d+4} > 4 > \dfrac{4d+2}{d+2}$, получаем

$$\frac{(2d+4)^2}{3d+4} = 2d; 4d^2+16d+16 = 6d^2+8d; d^2-4d-8 = 0.$$

Последнее уравнение не имеет натуральных решений.

При $a = 1$ получаем числа $d+1$, $3d+2$, $2d$, $\dfrac{4d+1}{d+1}$. При $d = 1$ числа $d+1$ и $2d$ совпадают, поэтому $d > 1$. Таким образом, члены геометрической прогрессии, записанные в порядке возрастания, выглядят так: $\dfrac{4d+1}{d+1}$, $d+1$, $2d$, $3d+2$. По свойству геометрической прогрессии:

$$\frac{4d+1}{d+1}\cdot(3d+2) = (d+1)\cdot 2d; 12d^2+11d+2 = 2d^3+4d^2+2d; 2d^3-8d^2-9d-2 = 0.$$

Последнее уравнение не имеет натуральных решений.

При $d = 1$ получаем числа $a(a+1)$, $2a+3$, 2, $\dfrac{a+4}{a+1}$. Случаи $a = 1$ и $a = 2$ были разобраны ранее, поэтому будем считать $a > 2$. Тогда члены геометрической прогрессии, записанные в порядке возрастания, выглядят так: $\dfrac{a+4}{a+1}$, 2, $2a+3$, $a(a+1)$. По свойству геометрической прогрессии:

$$\frac{a+4}{a+1}\cdot a(a+1) = 2\cdot(2a+3); a^2+4a = 4a+3; a^2 = 3.$$

Последнее уравнение не имеет натуральных решений.

Значит, Маша не могла стереть $a+d$.

Таким образом, Маша стёрла число a и получила числа $a(a+d)$, $2a+2d$, $3d$, $\dfrac{a+4d}{a}$. Заметим, что при $a > 2$ выполнены следующие неравенства

$$a(a+d) > 2a+2d > \frac{a+4d}{a}, a(a+d) > 3d > \frac{a+4d}{a}.$$

Значит, крайние члены прогрессии это $a(a+d)$ и $\dfrac{a+4d}{a}$. По свойству геометрической прогрессии:

$$\frac{a+4d}{a}\cdot a(a+d) = 3d\cdot(2a+2d); a^2+5ad+4d^2 = 6ad+6d^2; a^2-ad-2d^2 = 0,$$

откуда $a = -d$ или $a = 2d$. Первый случай не подходит, поскольку a и d — натуральные, значит, $a = 2d$. Получаем геометрическую прогрессию 3, $3d$,

$6d$, $6d^2$, откуда $d = 2$. То есть Катя записала числа 4, 6, 8, 10, 12, а Маша получила 24, 12, 6 и 3.

При $a = 2$ числа $a(a + d)$ и $2a + 2d$ совпадают между собой. Значит, $2a + 2d = 3d$, откуда $d = 4$. Получаем числа 12, 12, 12, 9, то есть этот случай не подходит.

При $a = 1$ получаем числа $d + 1$, $2d + 2$, $3d$, $4d + 1$. Наибольшее из этих чисел $4d + 1$, а наименьшее $d + 1$. По свойству геометрической прогрессии

$$(d + 1)(4d + 1) = 3d(2d + 2); 4d^2 + 5d + 1 = 6d^2 + 6d; 2d^2 + d - 1 = 0,$$

откуда $d = -1$ или $d = 0,5$, что невозможно.