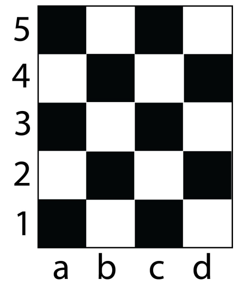
Задача 1.

В пятиэтажном доме квартиры находятся одна над другой, а на каждом из этажей расположены следующим образом (см. рисунок). Соседними квартирами считаются квартиры, имеющие общую стену или расположенные на соседних этажах одна над другой. Жители квартиры недовольны, если в какой-то из соседних квартир работает дрель (при этом жители квартиры будут довольны, если ни в одной из соседних квартир не работает дрель, даже если дрель работает внутри этой квартиры). Какое наименьшее число дрелей должно работать, чтобы все жители дома были недовольны?

Ответ: 8.

Решение.

Квартиры в доме соседствуют так же, как клетки на шахматной доске 4×5 (см. рисунок).



Заметим, что если дрель работает в квартире, соответствующей чёрной клетке, то от этого будут недовольны только жители квартир, соответствующих белым клеткам, и наоборот.

Найдём, какое наименьшее количество дрелей должно работать, чтобы все жители квартир, соответствующих белым клеткам. Пусть для этого достаточно не более трёх работающих дрелей. Тогда жители квартир, соответствующих клеткам $a2$, $a4$, $d1$ и $d5$, будут одновременно недовольны, только если дрель работает в квартире, соответствующей клетке $a3$, поскольку среди перечисленных белых клеток только $a2$ и $a4$ имеют общую соседнюю клетку $a3$. В этом случае жители квартир, соответствующих клеткам $b1$, $b5$ и $d3$, должны быть недовольны из-за работы дрелей в других квартирах. Но эти клетки не имеют общих соседних клеток, поэтому, чтобы жители соответствующих квартир были недовольны, должно работать хотя бы ещё три дрели. Таким образом, все жители квартир, соответствующих белым клеткам, будут недовольны, только если в квартирах, соответствующих чёрным клеткам работает не менее четырёх дрелей.

Аналогично, жители квартир, соответствующих чёрным клеткам, будут недовольны, только если в квартирах, соответствующих белым клеткам работает не менее четырёх дрелей. Значит, общее количество работающих дрелей не меньше восьми.

Восьми работающих дрелей достаточно, поскольку если дрели работают в каждой квартире на втором и четвёртом этаже, то все жители дома будут недовольны.

Задача 2.

Известно, что для любого целого x значение многочлена $ax^3 + bx^2 + cx + d$ с целыми коэффициентами a, b, c и d делится на 9. Докажите, что хотя бы два коэффициента этого многочлена делятся на 9.

Доказательство.

При $x = 0$ значение многочлена равно d, поэтому d делится на 9.

При $x = 1$ значение многочлена равно $a+b+c+d$, а при $x = -1$ значение многочлена равно $-a+b-c+d$. Значит, сумма этих значений $2b+2d$ делится на 9. Таким образом, $2b$ делится на 9, поскольку d делится на 9. Значит, b делится на 9. Получаем, что b и d делятся на 9.

Замечание. В условиях задачи коэффициенты a и c не обязательно делятся на 9. Например, значения многочлена $3x^3 - 3x$ делятся на 9 при любом целом значении x.

Задача 3.

В комнате имеется n лампочек и пять переключателей. При нажатии каждого из переключателей число горящих лампочек изменяется, причём выполнены следующие условия:

- число горящих лампочек после переключения зависит только от выбора переключателя и числа лампочек, горевших до переключения;
- число горящих лампочек после переключения различно для каждого из переключателей;
- если переключить любой из переключателей дважды *подряд*, то число горящих лампочек не изменится.

Известно, что при помощи этих пяти переключателей можно достичь любого числа горящих лампочек от 0 до n. При каких n такое могло быть?

Ответ: n — любое нечётное число, большее 4.

Решение.

Если все лампочки выключены, то после переключения разных переключателей число горящих лампочек будет различно. Поэтому лампочек не менее пяти.

С другой стороны, всего имеется $n+1$ различное состояние: горит 0 лампочек, 1 лампочка, ..., n лампочек. При заданном количестве горящих лампочек переключатель однозначно меняет их количество на другое. Таким образом, для каждого из переключателей $n + 1$ состояние оказывается разбито на пары состояний, которые этот переключатель меняет. Таким образом, n — нечётное.

Для нечётного n, большего 6, существует следующий пример. Будем рассматривать количество горящих лампочек по модулю $n + 1$. Для чётного числа горящих лампочек первый переключатель увеличивает количество горящиж лампочек на 1, второй переключатель уменьшает количество горящих лампочек на 1, третий переключатель увеличивает количество горящих лампочек на 3, четвёртый переключатель уменьшает количество горящих лампочек на 3. Для нечётного числа горящих лампочек всё наоборот: первый переключатель уменьшает количество горящиж лампочек на 1, второй переключатель увеличивает количество горящих лампочек на 1, третий переключатель уменьшает количество горящих лампочек на 3, четвёртый переключатель увеличивает количество горящих лампочек на 3. Пятый переключатель заменяет k горящих лампочек на $k + \dfrac{n+1}{2}$ горящих лампочек (по модулю $n + 1$).

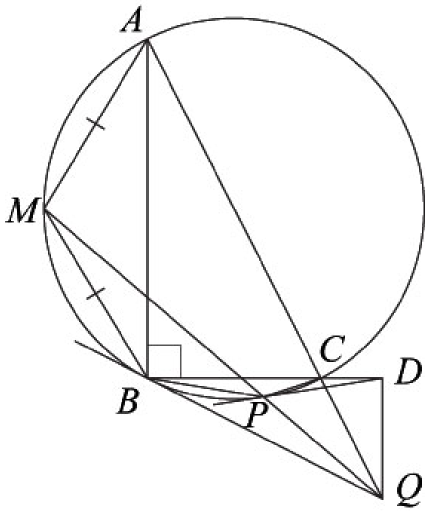
При $n = 5$ существует следующий пример: первый переключатель меняет 0 горящих лампочек на 1, 2 на 5 и 3 на 4, второй переключатель меняет 0 горящих лампочек на 2, 1 на 3 и 4 на 5, третий переключатель меняет 0 горящих лампочек на 3, 2 на 4 и 1 на 5, четвёртый переключатель меняет 0 горящих лампочек на 4, 3 на 5 и 1 на 2, пятый переключатель меняет 0 горящих лампочек на 5, 1 на 4 и 2 на 3.

Таким образом, описанная ситуация возможна для любого нечётного количества лампочек, большего четырёх.

Задача 4.

В прямоугольном треугольнике ABC угол B прямой, $AB > BC$. Около треугольника ABC описана окружность Ω. Касательная к Ω в точке B пересекает прямую AC в точке Q. Точка M — середина дуги AB окружности Ω, не содержащей точки C. Прямая QM пересекает окружность Ω в точках M и P. Касательная к Ω в точке P пересекает прямую BC в точке D. Докажите, что угол QDC прямой.

Доказательство.



В вписанном четырёхугольнике $ACPM$ сумма углов MAC и CPM равна $180°$, поэтому $\angle MAC = \angle CPQ$. Угол BMP опирается на дугу BP, а угол PBQ является углом между касательной и хордой, опирающейся на эту дугу, поэтому $\angle BMP = \angle PBQ$. Аналогично, $\angle BAC = \angle CBQ$ и $\angle CBP = \angle CPD$.

Таким образом, следующие пары треугольников подобны по двум углам: MAQ и CPQ, MBQ и BPQ, BAQ и CBQ, BPD и PCD.

Из подобия треугольников MAQ и CPQ получаем $CP = \dfrac{AM \cdot CQ}{MQ}$. Из подобия треугольников MBQ и BPQ получаем $BP = \dfrac{BM \cdot BQ}{MQ}$. Из подобия треугольников BPD и PCD получаем

$$\frac{CD}{PD} = \frac{CP}{BP} = \frac{AM \cdot CQ}{BM \cdot BQ} = \frac{CQ}{BQ},$$

поскольку $AM = BM$, как хорды, стягивающие равные дуги.

Заметим, что $\dfrac{CD}{BD} = \dfrac{CD^2}{BD^2} = \dfrac{CQ^2}{BQ^2} = \dfrac{CQ}{AQ}$. Значит, $\dfrac{CD}{BC + CD} = \dfrac{CQ}{AC + CQ}$, откуда $\dfrac{CD}{BC} = \dfrac{CQ}{AC}$. Таким образом, треугольники ACB и QCD подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними (углы ACB и DCQ вертикальные). Значит, $\angle QDC = \angle ABC = 90°$.

Задача 5.

Назовём натуральное число n *почти совершенным*, если сумма его делителей (включая единицу и само число) равна $3n$. Найдите все почти совершенные числа среди чисел от 1 до 1000.

Ответ: 120, 672.

Решение.

Обозначим сумму делителей числа n через $S(n)$.

Рассмотрим разложение числа n на простые множители: $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}$. Делителями числа n являются все числа вида $p_1^{b_1}p_2^{b_2}\dots p_k^{b_k}$, где $0 \leqslant b_i \leqslant a_i$ для каждого i. Таким образом, $S(n) = (1+p_1\dots+p_1^{a_1})(1+p_2\dots+p_2^{a_2})\dots(1+p_k+\dots+p_k^{a_k})$.

Заметим, что для числа p_i отношение $\dfrac{1+p_i+\dots p_i^{a_i}}{p_i^{a_i}}$ равно $\dfrac{p_i^{a_i+1}-1}{p_i^{a_i}(p_i-1)} < \dfrac{p_i}{p_i-1}$. Значит, число n должно быть чётным, поскольку произведение первых чётырёх нечётных простых чисел $3\cdot5\cdot7\cdot11 = 1155$ больше 1000, а произведение трёх наибольших чисел вида $\dfrac{p_i}{p_i-1}$, где p_i — простое нечётное число, не превосходит $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{7}{6} = \dfrac{105}{48} < 3$.

Если 2 входит в разложение n на простые множители в первой степени, то $n = 2\cdot p_2^{a_2}\cdot p_3^{a_3}\cdot p_4^{a_4}$, поскольку произведение большего чем трёх различных нечётных простых чисел превосходит 1000. Если n не делится на 3, то произведение трёх наибольших чисел вида $\dfrac{p_i}{p_i-1}$, где p_i — простое нечётное число, не равное 3, не превосходит $\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{7}{6}\cdot\dfrac{11}{10} = \dfrac{385}{240} < 2$. Значит, n делится на 3. При этом сумма $S(n)$ не должна делиться на 4, поскольку отношение $\dfrac{S(n)}{n}$ равно 3. Таким образом, 3 входит в разложение числа n в чётной степени.

Если n делится на 9, но не делится на 27, то $S(n)$ делится на $1+3+9 = 13$. Значит, n делится на 13, причём 13 входит в разложение числа n в первой степени, поскольку $2\cdot9\cdot169 > 1000$. Тогда число $S(n)$ должно делиться на $1+13 = 14$, а n должно делиться на 7, что невозможно, так как $2\cdot9\cdot7\cdot13 > 1000$.

Если n делится на 81, но не делится на 243, то $S(n)$ делится на $1+3+9+27+81 = 121$. В этом случае n должно делиться на 121, что невозможно, поскольку $2\cdot81\cdot121 > 1000$.

Если n делится на 729 или большую степень тройки, то n больше 1000, что невозможно. Значит, n должно делиться на 4.

Если 2 входит в разложение n на простые множители во второй степени, то $S(n)$ и n делится на 7, поскольку $1+2+4 = 7$. В этом случае n должно делиться на 49, поскольку иначе $S(n)$ делится на $1+7 = 8$ и отношение $\dfrac{S(n)}{n}$ не может равняться 3. Числа 196, 392, 588, 784 и 980 не удовлетворяют условию задачи.

Если 2 входит в разложение n на простые множители в третьей степени, то $S(n)$ делится на 15, поскольку $1+2+4+8 = 15$, а n делится на 5. Если n делится на 125, то $n = 1000$ и не удовлетворяет условию задачи. Если n делится на 25 и не делится на 125, то $S(n)$ и n должны делиться на $1+5+25 = 31$. Этот случай невозможен, поскольку $8 \cdot 25 \cdot 31 > 1000$. Значит, n делится на 5 и не делится на 25. В этом случае $S(n)$ делится на $(1+2+4+8)(1+5) = 90$, а значит, n делится на 3. Таким образом, n делится на 120. Число 120 удовлетворяет условию задачи, а числа 240, 360, 480, 600, 720, 840 и 960 не удовлетворяют.

Если 2 входит в разложение n на простые множители в четвёртой степени, то $S(n)$ и n делятся на 31, поскольку $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$. Таким образом, n делится на 496. Ни 496, ни 992 не удовлетворяют условию задачи.

Если 2 входит в разложение n на простые множители в пятой степени, то $S(n)$ делится на 63, поскольку $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$. Значит, n должно делиться на $32 \cdot 21 = 672$. Единственное такое число 672, меньшее 1000, удовлетворяет условию задачи.

Если 2 входит в разложение n на простые множители в степени $k \geqslant 6$, то $S(n) = 3n$ делится на 2^k и нечётное число $1+2+\ldots 2^k = 2^{k+1}-1$. Но при $k \geqslant 6$ число $2^k(2^{k+1}-1)$ больше 3000, поэтому этот случай невозможен.

Критерии проверки:

По всем задачам:

0 — задачи нет;
− — задача не решена, но по ней имеются записи;
+ — имеется верное решение.

Дополнительные критерии:

Задача №1:
+− — верно построен пример на 8 работающих дрелей, но отсутствует объяснение, почему меньшим числом обойтись нельзя, либо приведённое объяснение неполно.

Задача №2:
дополнительных критериев нет.

Задача №3:
−+ — доказано, что n является нечётным числом, большим четырёх;
+− — для нечётного n, большего четырёх, приведена верная схема работы лампочек.

Задача №4:
дополнительных критериев нет.

Задача №5:
−. — приведено одно из почти совершенных чисел, меньших 1000;
−+ — приведены оба почти совершенных числа, меньших 1000, но не доказано, что других нет.