Условия задач.

«Метро». В некотором городе есть метро (см схемы: точками обозначены станции, а линиями — перегоны между ними). Два подрядчика, фирмы "Альфа" и "Бета" играют в интересную игру, по очереди закрывая перегоны на ремонт. За один ход разрешается закрыть любое количество перегонов, отходящих от одной станции. При этом нужно, чтобы всегда оставалась возможность проехать по незакрытым перегонам от любой станции к любой другой. Начинает игру "Альфа". Тот, кто не может сделать ход, проигрывает.

Кто — "Альфа" или "Бета" — победит в этой игре, как бы ни играл партнёр? Рассмотрите случаи:

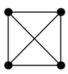
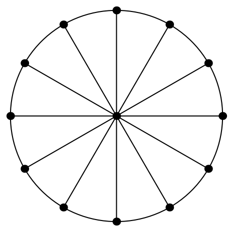
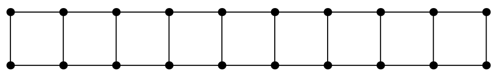
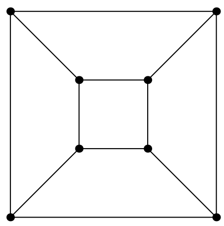
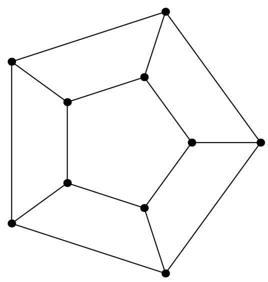
а) **4** станции, соединённые друг с другом (рис. 1)

б) Одна "кольцевая линия" с $N \geqslant 3$ станциями и одна станция в центре (на рис. 2 пример для $N = 12$)

в) Схема в виде "полоски" из N квадратиков (на рис. 3 пример для $N = 9$)

г) **8** станций, соединённых так, как показано на рис. 4

д) **10** станций, соединённых так, как показано на рис. 5

Решение:

Изложим решение на языке теории графов, называя, как это принято, станцию метро вершиной графа, а перегон — ребром. Для наглядности будем закрытый перегон просто удалять, стирая со схемы.

Укажем два важных наблюдения, очень упрощающих анализ игры.

Первое состоит в том, что если образовалась тупиковая вершина A (из которой выходит только одно ребро AB), то это ребро никто из игроков удалить не может, а также не может удалить все рёбра из B, оставив лишь AB. Никакие поездки по графу, не связанные с вершиной A также не могут использовать ребро AB. Поэтому игра на таком графе эквивалентна игре на графе, который получается, если стереть и ребро AB, и саму вершину A. Такое преобразование назовём "удаление тупика".

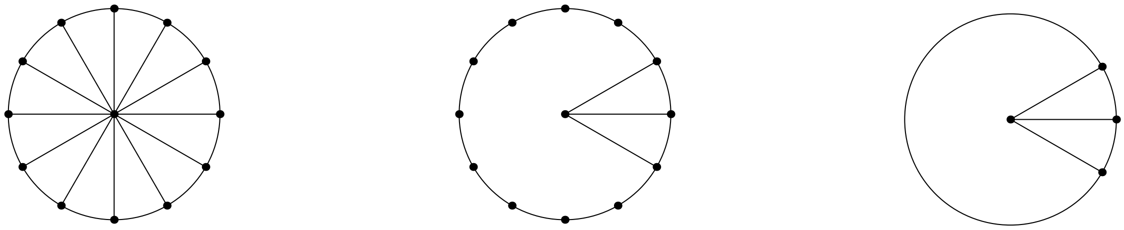
Второе соображение, вытекающее из предыдущего, вот какое — если образовалась вершина A, из которой ведут ровно два ребра AB и AC, то можно упростить граф, убрав A и соединив B и C напрямую ребром. Такое преобразование назовём "удаление проходной вершины".

Теперь перейдём к решению.

а) Победит "Бета". Все вершины равноправны (как и все рёбра из одной вершины), так что у "Альфы" лишь два хода — стереть одно или два ребра из какой-то вершины. Легко видеть, что "Бета" на каждый из них ответит так, что останется три ребра, ни одно из которых стереть нельзя.

б) При $\boldsymbol{N = 3}$ победит "Бета", так как эта схема точно такая же, как в пункте а): четыре вершины, и все со всеми соединены рёбрами.

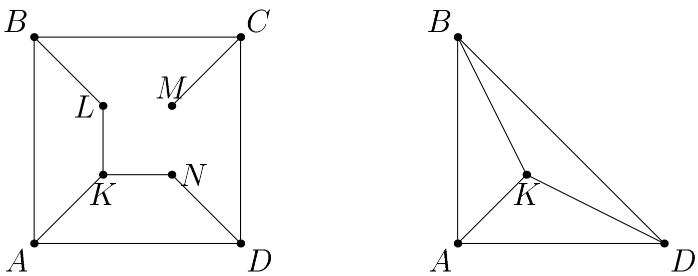
При $\boldsymbol{N > 3}$ победит "Альфа". Первым ходом она удалит все рёбра от центральной вершины, кроме трёх (см. рис.) Удаляя проходные вершины, мы получим опять пункт а), но теперь уже будет ход соперника.



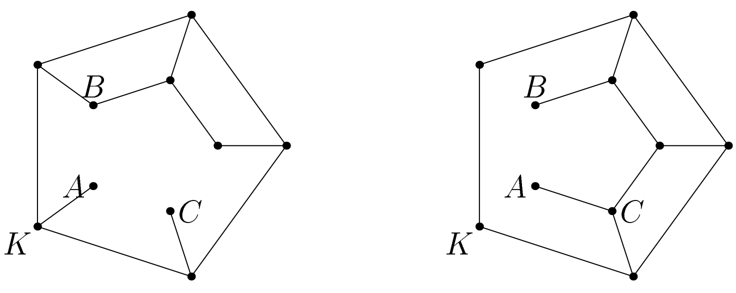
в) Победит "Альфа". При нечётном $\boldsymbol{N}$ первым ходом стираем ребро в середине. Теперь ребро $\boldsymbol{a}$ стирать никто не может, и дальнейшая стратегия "Альфы" состоит в зеркальном (относительно серединного перпендикуляра к $\boldsymbol{a}$) повторении ходов соперника.

При чётном $\boldsymbol{N}$ первым ходом стираем два ребра в середине. Теперь никакое ребро из $\boldsymbol{A}$ стирать никто не может, и дальнейшая стратегия "Альфы" также состоит в зеркальном (относительно вертикального ребра из $\boldsymbol{A}$) повторении ходов соперника.

г) Победит снова "Альфа". Стираем первым ходом два ребра. Упрощаем граф: убираем тупик $\boldsymbol{M}$, затем убираем проходные вершины $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{C}$. Получился граф пункта а), и теперь ход "Беты", которая, как мы знаем проиграет.



д) А вот тут наконец-то победит "Бета"! Как и при решении а) заметим, что все вершины равноправны. Пусть, например, "Альфа" взялась за вершину $\boldsymbol{A}$. Два ребра, исходящие из неё — $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{AC}$ — равноправны, а третье — $\boldsymbol{AK}$ — от них отличается. Если ребро $\boldsymbol{AK}$ "Альфа" не тронет (а одно из других непременно сотрёт, не важно, какое, пусть $\boldsymbol{AB}$), то "Бета", очевидно, всегда вторым ходом сможет пойти в вершину $\boldsymbol{C}$ так, что останется граф как на рисунке слева. Если же "Альфа" оставит одно из $\boldsymbol{AB}$ или $\boldsymbol{AC}$ (не важно, какое, пусть $\boldsymbol{AC}$), тогда "Бета" сможет сделать ход в вершину $\boldsymbol{B}$ так, что выйдет граф как на рисунке справа. Убирая тупики и проходные вершины, мы оба варианта упростим до графа из пункта а), на котором "Альфа" теперь начнёт игру и проиграет.



«Фрукты». На столе лежат $\boldsymbol{a}$ апельсинов, $\boldsymbol{b}$ бананов и $\boldsymbol{c}$ слив. За один ход надо съесть два разных фрукта. Кто не может сделать ход, тот проиграл.

Кто — начинающий или его соперник — победит в этой игре, как бы ни играл партнёр? Рассмотрите случаи:

а) $\boldsymbol{a = 1}$. Кто выигрывает в зависимости от $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$?

б) $\boldsymbol{a = 6,\ b = 8,\ c = 10}$;

в) $\boldsymbol{a = 7,\ b = 9,\ c = 15}$;

г) $\boldsymbol{a = 19,\ b = 20,\ c = 21}$.

Решение:

а) Если $b \neq c$, выигрывает первый. Будем для определенности считать, что $b < c$. Если b чётно, то первым ходом первый игрок должен съесть апельсин и сливу, а если b нечётно, то апельсин и банан. Тогда апельсинов не останется, и ходов будет столько же сколько осталось бананов, то есть четное число.

Если $b = c$ и нечётно, выигрывает также первый, съев сначала апельсин и банан. Опять же, ходов будет столько же сколько осталось бананов, то есть чётное число. А вот если $b = c$ и чётно, побеждает второй игрок. Для $b = c = 0$ это очевидно, а в противном случае, если первый ест апельсин, то остаётся нечётное число ходов, а если не ест, то второй становится в роль первого в разобранной выше ситуации.

б) Выигрывает второй. Ему достаточно повторять последний ход первого. В таком случае после каждого хода первого количества двух видов фруктов будут нечётными, следовательно, ненулевыми. Поэтому второй всегда сможет сделать ход. А после его хода всех фруктов будет чётное количество.

в) Выигрывает первый. Первым ходом он может съесть апельсин и банан. Этим он добьется выполнения двух условий. Во-первых, апельсинов и бананов (вместе взятых) станет меньше, чем слив. Поэтому можно считать, что каждым ходом берется либо апельсин, либо банан, либо то и другое сразу. Таких ходов будет не более $6 + 8 = 14$, и 15-ти слив заведомо хватит. Во-вторых, и апельсинов, и бананов станет чётное число. Второй игрок будет вынужден нарушить чётность числа хотя бы одного из этих двух фруктов. А первый сможет снова добиться чётности числа как апельсинов, так и бананов. После каждого хода второго останется хотя бы один апельсин или банан (из-за нечётности) и хотя бы одна слива (так как слив много), поэтому ход у первого игрока всегда будет.

г) Выигрывает первый. Первым ходом он может взять апельсин и сливу. Теперь всех фруктов чётное число, и работает стратегия повторения ходов из пункта б), но первый оказывается в роли второго.

«Одинокий крестик».

Дан клетчатый прямоугольник. Сначала первый игрок помечает крестиком любую клетку. После этого второй игрок делает ход: разрезает прямоугольник на два прямоугольника по любой линии сетки, часть с крестиком выбрасывает, а на оставшейся части ставит свой крестик в любой клетке. Затем свой ход делает первый игрок: разрезает оставшуюся часть по любой линии сетки, часть с крестиком соперника выбрасывает, а на новом остатке ставит свой крестик. Игроки делают такие ходы по очереди. Кто не сможет сделать ход, проигрывает.

Кто — начинающий или его соперник — победит в этой игре, как бы ни играл партнёр? Рассмотрите игру для прямоугольников следующих размеров:

а) 3×10;

б) $4 \times n$, $n \geqslant 4$;

в) $5 \times n$, $n \geqslant 5$;

г) 7×7;

д) $n \times n$;

е) $m \times n$.

Решение:

Разумеется, можно ограничиться только пунктом е), однако изложим решения некоторых предыдущих пунктов, чтобы было понятнее, как решить общкю задачу.

На квадрате 1×1 побеждает первый игрок, а на полоске $1 \times n$ при $n \geqslant 1$ — второй, оставляющий пустую клетку с края (с одного края она всегда будет). На квадрате 2×2 побеждает первый игрок, а на полоске $2 \times n$ при $n \geqslant 4$ — второй — он оставляет себе пустой квадратик с края (с одного края такой всегда будет). На прямоугольнике 2×3 выигрывает тоже первый, если ставит крестик не в углу.

После разбора этих примеров кажется правдоподобным, что на квадрате выигрывает первый, а на достаточно длинной полоске — второй, который оставляет себе квадрат. Этих наблюдений хватит, чтобы решить несколько первых пунктов и понять, что такое "достаточно длинная полоска" и как играть, если она недостаточно длинна.

а) Ответ: победит второй. На квадрате 3×3 победит первый, ходя в центр. Для $3 \times n$ при $n \geqslant 4$ (в частности, для $n = 10$) работает стратегия для второго "оставь себе полоску 2×3", мы уже знаем, как второй (теперь он уже первый!) сможет на ней выиграть.

б) Ответ: победит первый при $n < 8$, иначе второй. При $n < 8$ первый ходит в центр (или "почти в центр", об этом писалось ранее). Второй сможет оставить только полоски шириной не более трёх, на которых проиграет (потому что он теперь начинает, а на этих полосках есть стратегия для второго). При $n \geqslant 8$ для второго работает стратегия "оставь себе квадрат".

в) Ответ почему-то тот же: победит первый при $n < 8$, иначе второй. При $n < 8$ первый ходит в центр (или "почти в центр"). Второй сможет оставить только полоски шириной не более трёх, на которых проиграет (потому что он теперь начинает, а на этих полосках есть стратегия для второго). При $n \geqslant 8$ второй может себе оставить полоску 4×5, на которой умеет побеждать.

г) Ответ: победит первый, ходя в центр. Решение достаточно ясно из предыдущего разбора.

Становится почти понятно, что для квадратов победит первый, для прямоугольников, у которых длина по крайней мере вдвое превышает ширину — второй, а в промежуточных случаях бывает по-разному. Этого уже достаточно для следующего пункта.

д) Ответ: победит первый, ходя в центр. Доказательство индукцией по n. База очевидна. Шаг: пусть для всех $k \leqslant n$ доказано. Для $k = n$ ходим в центр. Второй игрок оставит себе полосу $l \times n$, где $l \leqslant \frac{n}{2}$ и поставит на ней крест. Тогда первый оставит себе квадрат $l \times l$ (это всегда можно сделать, ибо $n \geqslant 2l$) и далее выиграет по предположению индукции.

е) Теперь можно взяться за общий случай. Пусть $m \leqslant n$. Тогда победит первый при $n < A$, иначе второй. Здесь A — наименьшее число, которое превышает m и является степенью двойки. Доказательство индукцией по n. База разобрана ранее. Шаг: пусть для всех $k \leqslant m$ доказано. Для $k = m$ пусть $2^{a-1} \leqslant m < 2^a = A$. То, что при $n \geqslant A$ победит второй, понятно — он после любого хода первого режет поле пополам и оставляет себе поле $2^{a-1} \times m$, на котором по предположению индукции (ведь $2^{a-1} \leqslant m < 2^a$) победит тот, кому сейчас ходить. Пусть теперь $m \leqslant n < A$. Тогда первый игрок ходит в центр. Второй игрок может остаить себе полоску $p \times m$, где $p \leqslant \frac{n}{2} < \frac{A}{2} = 2^{a-1} \leqslant m$. По предположению индукции, игрок, начинающий с такого положения, проиграет, так что у второго шансов нет.