XXXVIII Турнир имени М. В. Ломоносова 27 сентября 2015 года

Конкурс по математике. Ответы и решения

(предварительная версия от 02.10.2015)

В скобках указано, каким классам рекомендуется задача (решение задач более младших классов при подведении итогов не учитывается).

1. (6–10) Для ремонта пропеллера Карлсону необходимо купить 3 лопасти и 1 винтик. В магазине продаются лопасти по 120 тугриков и винтики по 9 тугриков. Но после покупки не менее чем на 250 тугриков дают скидку 20% на все следующие покупки. Сможет ли Карлсон отремонтировать пропеллер, если у него с собой только 360 тугриков?

Ответ. Да, сможет.

Решение. Пусть первой покупкой Карлсон приобретёт 2 лопасти и 2 винтика, потратив $2 \cdot 120 + 2 \cdot 9 = 258$ тугриков. Поскольку стоимость покупки больше 250 тугриков, то третью лопасть Карлсон может приобрести со скидкой 20%, потратив $120 \cdot 0{,}8 = 96$ тугриков. Итак, суммарно Карлсон потратил $258 + 96 = 354$ тугрика и приобрел все необходимые для ремонта детали.

Замечание. Найти стоимость лопасти со скидкой можно по-другому: 10% от 120 тугриков — это 12 тугриков, поэтому 20% — это 24 тугрика, откуда стоимость лопасти со скидкой равна $120 - 24 = 96$.

2. (6–7) На верхней грани кубика $3 \times 3 \times 3$ к центральному квадрату 1×1 приклеили кубик $1 \times 1 \times 1$. Как разделить получившуюся фигуру на 7 равных? *(Один из способов записать ответ — нарисовать отдельно каждый слой фигуры, нижний, средний, верхний и самый верхний кубик, и на каждом кубике написать номер части, к которой он относится.)*

Решение. Например, так.

1	1	4
1	2	3
1	2	3

нижний слой

5	5	4
5	6	6
5	2	3

средний слой

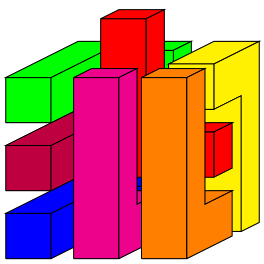
7	7	4
7	6	4
7	2	3

верхний слой

6

верхний кубик

Каждая фигурка с номером от 1 до 7 представляет из себя букву “Г”.



Комментарий. Жюри неизвестны разрезания на другие виды фигурок (в том числе на фигуры, не являющиеся объединением целых кубиков).

3. (6–8) У каждого из художников творческого объединения «Терпение и труд» свой рабочий график. Шестеро из них пишут по одной картине раз в два дня, ещё восемь художников — по одной картине раз в три дня, остальные не пишут картин никогда. С 22 по 26 сентября они написали в общей сложности 30 картин. Сколько картин они напишут 27 сентября?

Ответ. 4 картины.

Решение. Посмотрим, сколько картин напишут художники с 22-ого по 27-ое сентября включительно.

Каждый из шести художников, которые пишут по одной картине раз в два дня, напишет по 3 картины (по одной в каждую пару дней 22–23, 24–25 и 26–27), а каждый из восьми, которые пишут по одной картине раз в три дня, — по 2 картины (по одной в каждую тройку дней 22–23–24 и 25–26–27).

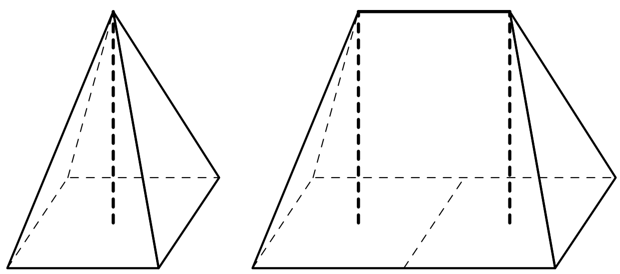
Таким образом, суммарно художники напишут $6 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 34$ картины. Поскольку по условию с 22-ого по 26-ого они написали 30 картин, то 27-ого они напишут $34 - 30 = 4$ картины.

4. (8–9) Среди чисел $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, a/b два положительных и два отрицательных. Является ли число b положительным или отрицательным?

Ответ. Отрицательным.

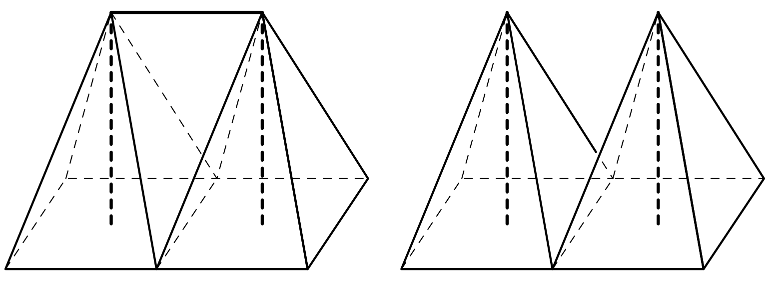
Решение. Числа $a \cdot b$ и a/b одного знака. Следовательно, $a + b$ и $a - b$ имеют другой знак. Поскольку a находится между ними, то a тоже имеет этот знак. Таким образом, $a \cdot b$ (и a/b) — другого знака, чем a. Это означает, что b отрицательно.

5. (8–9) На землю положили квадратную раму, в центре квадрата установили вертикальный шест. Когда на эту конструкцию сверху натянули ткань, получилась маленькая палатка. Если положить рядом вплотную две таких же рамы, в центре каждой поставить вертикальный шест той же длины и натянуть сверху ткань, получится большая палатка. На маленькую палатку ушло 4 квадратных метра ткани. А сколько ткани потребуется для большой палатки?

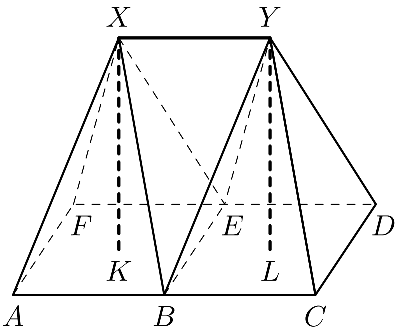


Ответ. 8 кв.м.

Решение. Проведем на ткани линии так, как показано на левом рисунке. Заметим, что если переложить два треугольника, то получится две палатки, равные маленькой палатке. Поэтому ответ $2 \cdot 4 = 8$.



Замечание. Доказывать, что треугольники равны, можно примерно следующим образом (от участников такие рассуждения не требовались).



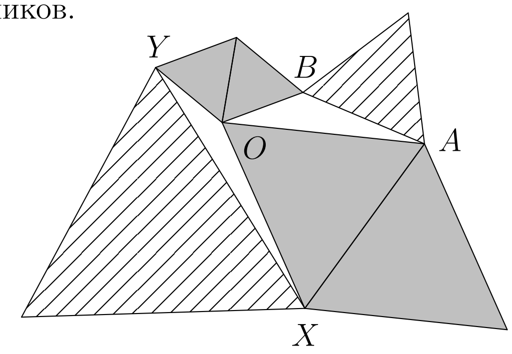
Обозначим точки так, как показано на картинке. Заметим, что для треугольников AKX и BKX сторона KX — общая, $AK = BK$, а также $\angle AKX = \angle BKX = 90^\circ$ (в силу вертикальности установленного шеста). Поэтому треугольники AKX и BKX равны по двум сторонам и углу между ними, и $AX = BX$. Аналогично получаем, что $BX = BY$.

Дальше, несложно видеть, что $KL = AB$, например потому, что отрезки AK и BL равны и параллельны. Поэтому четырехугольник $ABLK$ — пареллелограмм.

Наконец, отрезки KX и LY равны по длине и расположены вертикально, поэтому $KXYL$ — прямоугольник и $XY = KL = AB$.

Таким образом, можно видеть, что все треугольники ABX, BXY, YBC, YCD, YDF, FXY, XEF, XFA равны по трем сторонам. Маленькая палатка состояла из четырех таких треугольников, а большая — из восьми.

6. (10–11) Шесть равносторонних треугольников расположены, как на рисунке. Докажите, что сумма площадей заштрихованных треугольников равна сумме площадей закрашенных треугольников.



Решение. Обозначим вершины так, как показано на картинке. Заметим, что $OA = OX$, $OB = OY$, а $\angle AOB + \angle XOY = 360^\circ - \angle AOX - \angle BOY = 360^\circ - 60^\circ - 120^\circ = 180^\circ$, откуда $\cos\angle XOY = \cos(180^\circ - \angle AOB) = -\cos\angle AOB$.

Поскольку площадь равностороннего треугольника со стороной t равна $\frac{\sqrt{3}}{4}t^2$, достаточно доказать, что $AB^2 + XY^2 = 2(AO^2 + BO^2)$.

По теореме косинусов для треугольников AOB и XOY имеем

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\angle AOB,$$
$$XY^2 = OX^2 + OY^2 - 2OX \cdot OY \cdot \cos\angle XOY$$

Складывая эти два равенства, получаем требуемое.

7. (10–11) Первый член бесконечной арифметической прогрессии из натуральных чисел равен 1. Докажите, что среди её членов можно найти 2015 последовательных членов геометрической прогрессии.

Решение. Пусть разность прогрессии равна $a-1$ (т. е. второй член прогрессии равен a). Покажем, что тогда среди её членов можно найти числа 1, a, a^2, a^3, $\ldots$, a^{2014}, из чего очевидно следует утверждение задачи.

Действительно, поскольку $a^k = 1+(a-1)(1+a+a^2+\ldots+a^{k-1})$, число a^k встретится в исходной арифметической прогрессии на месте с номером $2+a+\ldots+a^{k-1}$.

8. (10–11) В зоопарке жили 200 попугаев. Однажды они по очереди сделали по одному заявлению. Начиная со 2-го, все заявления были «Среди сделанных ранее заявлений ложных — более 70%». Сколько всего ложных заявлений сделали попугаи?

Ответ. 140.

Решение. Заметим, что если 1-е утверждение было истинным, то 2-е будет ложным, и наоборот, если 1-е утверждение было ложным, то 2-е будет истинным. Поскольку истинность утверждения зависит лишь от количества ложных утверждений среди предыдущих, то истинность всех оставшихся заявлений не зависит от того, каким было первое утверждение.

Поэтому, не умаляя общности, будем считать, что оно было ложным, и выпишем истинность первых одиннадцати утверждений:

$$\text{Л, И, Л, Л, И, Л, Л, И, Л, Л, Л}\ldots$$

Заметим, что среди первых 10 утверждений ровно 7 ложных, поэтому 11-е утверждение будет ложным. Истинность следующих утверждений не изменится, если мы будем считать процент ложных утверждений, начиная с 11-го. Действительно, если среди какого-то набора утверждений ложных более 70%, то после добавления ещё 7 ложных утверждений и 3 истинных общее количество ложных останется больше 70%. (см. комментарий). Аналогично для наборов, где ложных утверждений менее 70% или ровно 70%.

Таким образом, следующие 10 утверждений полностью повторят первые 10, т. е. среди первых 20 утверждений ровно 14 ложных. Повторив данное рассуждение еще раз, получим, что истинность утверждений с 21 по 30 совпадает с истинностью соответствующих утверждений с 1 по 10.

Повторяя это рассуждение еще несколько раз, в конце концов мы получим 200 утверждений, среди которых ровно 140 ложных.

Комментарий. Возможно, интуитивно очевиднее данное утверждение, если формулировать его про смеси: если к раствору с концентрацией более 70% добавить раствор с концентрацией ровно 70%, то получится раствор с концентрацией более 70%.

Приведем и чисто алгебраическое доказательство: пусть $\lambda > 0{,}7$ — доля ложных утверждений в каком-то наборе, N — количество утверждений в этом наборе, тогда $L = \lambda N$ — количество ложных утверждений в данном наборе. Откуда $L+7 = \lambda N + 0{,}7\cdot 10 > 0{,}7\cdot(N+10)$.

Идея второго решения. Заметим, что с каждым новым утверждением 70% от числа произнесенных утверждений увеличивается на 0,7. При этом, если число ложных утверждений к этому моменту было больше 70%, то количество ложных высказываний не меняется, а если меньше или равно 70%, то увеличивается на 1.

Поэтому количество ложных утверждений и 70% от количества всех утверждений всегда отличаются строго меньше, чем на 1. В частности, спустя 200 утверждений число ложных утверждений должно отличаться от $0{,}7 \cdot 200 = 140$ строго меньше чем на 1, а такое целое число ровно одно, 140.

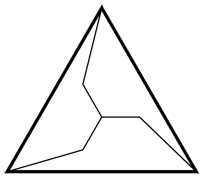
Комментарий. Можно заметить, что идеи, возникающие во втором решении, позволяют доказать и более общие утверждения. Например, если все заявления, начиная с некоторого, были «Среди сделанных ранее заявлений доля ложных больше p/q», — то в какой-то момент доля ложных заявлений станет равна p/q.

9. (11) Разрежьте правильный тетраэдр на равные многогранники с 6 гранями.

Решение. Приведем примеры, в которых правильный тетраэдр разрезается на 2, на 3 и на 4 равных 6-гранника (есть и другие примеры; участникам достаточно было привести один пример).

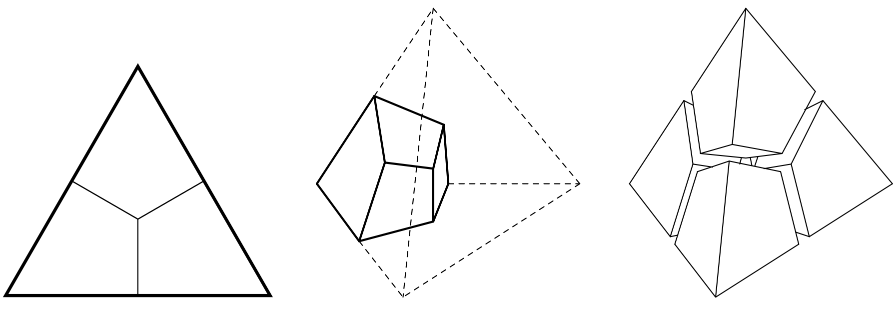
Разрезание на 2 части. Возьмем центр правильного тетраэдра и соединим его с каждой из вершин. Получится разрезание тетраэдра на 4 равные правильные пирамиды, у каждой из которых по 4 грани. Если объединить эти части по две, получатся два равных шестигранника.

Разрезание на 3 части. Разрежем правильный треугольник на 3 равных пятиугольника (см. рис.). Пятиугольники равны, так как совмещаются поворотом на 120°. Если взять такую картинку в основании тетраэдра и соединить оставшуюся вершину тетраэдра с каждой из вершин пятиугольников, то получится разрезание тетраэдра на 3 равных шестигранника (каждый из которых является невыпуклой пирамидой).



Разрезание на 4 части. Во всех предыдущих решениях части шестигранники были невыпуклыми, но можно разрезать тетраэдр и на равные *выпуклые* шестигранники.

Соединим сначала на каждой из граней центр с серединой каждого ребра грани. Грани окажутся разбиты на равные четырехугольники. Теперь соединим центр тетраэдра со всеми центрами граней — и получится разбиение тетраэдра на 4 равных шестигранника с четырехугольными гранями. (Центр тетраэдра, центры двух граней и середина их общего ребра лежат в одной плоскости — а именно, в плоскости, проходящей через середину ребра и содержащей противоположное ребро.)



Вариант подготовили: А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, Т. И. Голенищева-Кутузова, Т. В. Казицына, Н. Ю. Медведь, Г. А. Мерзон, М. А. Раскин, И. В. Раскина, Б. Р. Френкин, А. В. Шаповалов, И. В. Ященко.