Матигры – 2016, с решениями.

«Скрепки» *(предложила А. Г. Банникова).* Дана цепочка из скрепок нескольких разных цветов. Играют двое. За ход можно расцепить любые две ***разноцветные*** скрепки и соединить снова полученные части в одну цепочку, сцепив ***одноцветные*** скрепки. Проигрывает тот, у кого нет хода.

Кто — начинающий или его соперник — победит в этой игре, как бы ни играл его партнёр? (Разумеется, ответ может зависеть от исходной цепочки.)

Рассмотрите случаи (для удобства записи мы обозначаем цвета цифрами):

а) Цепочка **213312**;

б) Цепочка **121314151617181912**;

в) Цепочка со скрепками двух цветов, расположение скрепок не указано;

г) Цепочка со скрепками трёх цветов, расположение скрепок не указано;

д) Придумайте цепочку из шести скрепок (количество цветов выберите сами), для которой начинающий может обеспечить себе победу, но если он сделает неправильный первый ход, то победу сможет себе обеспечить его соперник. Покажите ход игры в обоих случаях.

Решение:

а) Победит второй игрок. Есть четыре варианта хода первого, которые приводят к положениям **122133**, **133122**, **331221** и **221331**. Из любого положения второй игрок сделает (единственно возможный) ход, приведя цепочку к виду **221133**, после чего у первого ходов не будет.

б) Победит первый игрок. Пусть он сделал ход **121314151617181912** $\longrightarrow$ **1314151617181221**. Двойки сцеплять больше не удастся, остаются единицы. После любого ответа второго получится цепочка, где единица только с одного края, а после второго хода первого единиц по краям не будет, и у второго игрока не останется ходов.

Общее соображение, относящееся ко двум следующим пунктам, состоит в том, что у данной игры есть полуинвариант — число мест, где соединяются разноцветные скрепки: при любом ходе оно уменьшается на один. Из этого следует, что игра закончится через конечное число ходов. Для краткости места соединения разноцветных скрепок назовём ***узлами***.

в) Если узел всего один, то ход невозможен. Если не один, то возможен. В самом деле, пусть цвета **1** и **2** и слева цвет **1**. Двигаясь направо, мы вскоре встретим цвет **2**. Если этот узел нельзя расцепить, значит, на правом конце цепочки также **2**. Все двойки не могут идти подряд (иначе узел был бы только один), значит будем двигаться вправо дальше до первой единицы. Найденный узел, очевидно, можно расцепить. Итак, в этом случае игра будет идти $\boldsymbol{N-1}$ ходов, где $\boldsymbol{N}$ — число узлов в исходной цепочке. При чётном $\boldsymbol{N}$ победит первый игрок, а при нечётном — второй. При этом игроки могут играть как угодно — исход игры от их ходов не зависит. Такие игры принято называть «игра-шутка».

г) В этом случае узлов, очевидно, не менее двух, и, если их ровно два, то ход невозможен. Покажем, что в остальных случаях ход сделать можно. Если концы цепочки одноцветные, то можно, очевидно, расцепить любой узел. Если разноцветные, то пусть слева стоит **1**, справа **3**. Если вообще все единицы стоят слева, а все тройки справа, то в середине стоят подряд двойки и узлов два — игра окончена. Если не так, то найдутся, допустим, единицы, отделённые от единиц с левого края. Узел перед первой слева такой единицей можно расцепить. В этом случае игра будет идти $\boldsymbol{N-2}$ ходов, где $\boldsymbol{N}$ — число узлов в исходной цепочке. При нечётном $\boldsymbol{N}$ победит первый игрок, а при чётном — второй. Это также игра-шутка.

д) Это задание показывает, что не всегда данная игра будет игрой-шуткой. Из решения предыдущих пунктов понятно, что цветов должно быть не менее четырёх. Рассмотрим цепочку **123241**. Ход **123241** $\longrightarrow$ **112324** сразу приводит первого игрока к победе, а ошибочный ход **123241** $\longrightarrow$ **241123** даст возможность второму сходить **241123** $\longrightarrow$ **322411** и победить.

«Делители» *(предложил А. В. Хачатурян).* Вначале на доске написано число **1**. Двое играют в игру. За ход можно прибавить к написанному на доске числу любой его делитель (в том числе единицу и само это число), новое число написать на доске, а старое стереть. Нельзя писать числа, превышающие $\boldsymbol{N}$. Побеждает тот, кто первым напишет $\boldsymbol{N}$.

Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнёр?
Рассмотрите случаи:
а) $N = 6$;
б) N — любое нечётное число;
в) $N = 1024$;
г) $N = 120$;
д) $N = 2p$, где p — простое число.
е) Вы играете до $N = 42$, на доске число 15, Ваш ход. Сможете ли Вы наверняка победить своего соперника?

Решение:

а) Победит начинающий. Он пишет **2**, второй после этого может написать как **3**, так и **4**, но первый вслед за ним всё равно пишет **6** и побеждает.

Для разбора следующих пунктов заметим, что второй игрок обладает существенным преимуществом, управляя чётностью числа. Вначале первый игрок изменяет нечётное число (единицу). У любого нечётного числа все делители нечётные, так что второй игрок получит от первого чётное число. Он может оставить его чётным, но также всегда (если он ещё не проиграл) может увеличить его на **1** и снова предоставить первому нечётное число. Этот принцип игры второго игрока — всегда прибавлять единицу — назовём ***стандартной стратегией.***

б) Победит второй игрок, стандартная стратегия. Первый никогда не получит N, так как N нечётно.

в) Победит второй игрок, применяя стандартную стратегию с одним исключением. У числа **1024** есть ровно один нечётный делитель (единица), а это значит, что мы (мы говорим от лица второго игрока) не должны предоставлять сопернику число $1024 - 1 = 1023$. То есть, получив от соперника **1022**, нам не нужно прибавлять к нему единицу. Мы можем просто прибавить двойку и победить! Это рассуждение применимо к любой степени двойки, кроме $N = 2$ (где победит начинающий).

г) Победит снова второй игрок, применяя стандартную стратегию, но с некоторыми нюансами. Итак, мы (опять говорим от лица второго) всякий раз предоставляем сопернику нечётное число, из которого тот получает чётное, но он не должен получить **120**. У числа **120** четыре нечётных делителя — **1**, **3**, **5** и **15**, поэтому нам нельзя давать сопернику числа $119 = 120 - 1$, $117 = 120 - 3$, $115 = 120 - 5$ и $105 = 120 - 15$. Это значит, что нам нужно, получив от него **118**, **116**, **114** или **104**, не прибавлять к ним единицу, а сделать что-то ещё. В первых трёх случаях мы можем поступить так же, как в предыдущем пункте — просто сразу выиграть, прибавив **2**, **4** и **6** соответственно. А вот с **104** наши дела будут плохи, так что придётся предусмотреть, чтобы первый игрок этого числа не получил. Получить он его теоретически может из $104 - 1 = 103$ и $104 - 13 = 91$, — других нечётных делителей у **104** нету. Значит, нам нельзя прибавлять единицу ни к **90**, ни к **102**. К **90** вполне можно прибавить **30** и победить. А из **102** мы сами сделаем **104**, и теперь соперник с этим числом проиграет.

д) И опять победит второй игрок (кроме случая $N = 6$), действуя по стандартной стратегии с некоторыми изменениями. Мы (снова рассуждаем от лица второго игрока) не должны дать сопернику чисел $N - 1 = 2p - 1$ и $N - p = p$, потому что других нечётных делителей, кроме **1** и p, у N нет. Значит, нам нельзя прибавить **1** к $2p - 2$ (ничего страшного, прибавим **2** и победим) и к числу $p - 1$.

Пусть $p > 3$. Тогда $p - 1$ заведомо чётное число. Если оно не является степенью двойки, то у него есть простой нечётный делитель, который как раз мы и можем прибавить (и заметим, что при этом $2p - 1$ не может получиться!). Если же $p - 1 = 2^m$, то мы позаботимся, чтобы самим получить это число (как именно — описано в пункте в) и предоставим его сопернику. Если он теперь прибавит единицу, мы сразу победим, если прибавит что-то другое — продолжим стандартную стратегию (и не забыв прибавить **2** к $N - 2$).

Случай $p = 3$ разобран в первом пункте (и там ответ другой), в случае $p = 2$ победит опять же второй игрок, и это легко проверить непосредственно.

е) Да. Пишем **16**. Если соперник пишет **17** или **32**, он проиграл — мы пишем **34**, он **35** или **36**, и мы победили. Если соперник пишет **20** или **24**, мы пишем **25**. Если же он пишет **18**, то мы **27**.

Если после **25** он пишет **30**, то мы **31**, он на это **32**, но мы знаем, что это для него плохо. Если после **25** он пишет **26**, то мы пишем **27**.

Итак, осталось разобраться с **27**. Если он делает из него **28** или **36**, то мы выиграли. Если же **30**, то мы тоже выигрываем — способ описан выше.

«Подальше от исхоженных дорог» *(предложила И. В. Раскина).* В угловой клетке клетчатой доски $m \times n$ стоит фишка. Двое по очереди ходят ею. За один ход фишку можно переместить в соседнюю по стороне клетку. При этом нельзя ходить на клетки, где фишка уже была, а также на клетки, имеющие общую сторону с теми, на которых фишка уже была (не считая той, где она находится сейчас). Проигрывает тот, кто не может сделать хода.

Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнёр?

Рассмотрите случаи:

а) $m = n = 8$;

б) $m = 4$, $n = 5$;

в) $m = 2$, n — любое;

г) $m = 3$, n — любое;

д) m и n — любые нечётные;

Решение:

а) Победит второй игрок, возвращая фишку на диагональ, ведущую из стартового угла.

б) Победит первый игрок, ставя фишку на диагональ, ведущую из финишного угла и затем играя как второй игрок в предыдущем пункте.

Для изложения дальнейшего нам удобно будет договориться о следующем обозначении. У фишки в любой момент игры может теоретически быть от нуля до трёх ходов. Если ходов нет, игра окончена. Если ход только один, то мы можем в эту клетку вписать цифру **1** или **2** в зависимости от номера игрока, который её туда ставит. Если ходов два, то они (мы всегда будем за этим следить!) будут в двух соседних направлениях, например из клетки S первый игрок может пойти на x и на y. При этом наша (второго игрока) стратегия будет состоять в том, что мы пойдём в клетку **2** независимо от того, куда пошёл первый. В этом случае мы будем просто ставить **2** по диагонали от S. Также наша стратегия не допустит ситуации, когда у соперника три возможных хода.

x	2
S	y

	2
S	

Теперь перейдём к описанию стратегий для нескольких следующих пунктов.

в) При $n = 3k$ и $n = 3k + 1$ побеждает первый игрок, иначе второй. На схемах дана стратегия для первого игрока, более жирной линией показаны возможные положения правого края поля — видно, что у второго игрока хода не будет.

		1	2	1				1	$\cdots$
S	1				1	2	1		$\cdots$

1	2	1				1	2	1		$\cdots$
S			1	2	1				1	$\cdots$

А вот при $n = 3k + 2$ победит второй игрок. Ниже на схеме показана стратегия.

	2	1	2				2	$\cdots$
S				2	1	2		$\cdots$

г) При чётных n побеждает первый игрок, иначе второй. На схемах показаны стратегии за первого при $n = 4k$ и $n = 4k + 2$.

			1	2	1						1	$\cdots$
		1				1				1		$\cdots$
S	1						1	2	1			$\cdots$

	1	2	1						1	$\cdots$
1				1				1		$\cdots$
S					1	2	1			$\cdots$

Вот стратегия для второго при $\boldsymbol{n = 4k + 3}$.

		2	1	2						2	$\cdots$
	2				2				2		$\cdots$
S						2	1	2			$\cdots$

И, наконец, стратегия для второго игрока при $\boldsymbol{n = 4k + 1}$. Она будет немного разной в зависимости от первого хода.

				2	1	2			$\cdots$
			2				2		$\cdots$
S	1	2						2	$\cdots$

2	1	2						2	$\cdots$
1			2				2		$\cdots$
S				2	1	2			$\cdots$

д) Выиграет второй игрок. Для объяснения стратегии раскрасим некоторые клетки в два цвета, принцип раскрашивания ясен из примера:

a	b	a	b	a	b	a
b		b		b		b
a	b	a	b	a	b	a
b		b		b		b
a	b	a	b	a	b	a

Стратегия второго игрока состоит в том, что он всегда ставит фишку на цвет $\boldsymbol{a}$. У него всегда будет ход, ибо первый игрок ставит фишку на цвет $\boldsymbol{b}$, а клетки этого цвета заключены между двумя $\boldsymbol{a}$-клетками, с одной из которых первый только что пришёл, а вторая свободна, ибо иначе первый не мог сделать такой ход. На эту свободную клетку сделать ход можно, так как если рядом с ней на $\boldsymbol{b}$-клетке побывала (поставленная туда когда-то первым игроком) фишка, то на обеих соседних с нею $\boldsymbol{a}$ – клетках она была непосредственно до этого хода и сразу после него.